I. Интеграл на Риман. Основни свойства. Преимущества и недостатъци. Идея за дефиниция на интеграл на Лебег посредством суми на Лебег и мярка на множество

Опр. (Интеграл на Риман) Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е ограничена и $\tau: a=x_0<\ldots<x_n=b$ е разбиване на $[a,b]$. Нека $\xi_i$ е междинна точка в $[x_{i-1},x_i]$ за $i=1,\ldots,n$.

Риманова сума по разбиване $\tau$ и междинни точки $\xi_i$ наричаме

$$R_\tau := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Диаметър на разбиването $\tau$ наричаме

$$\operatorname{diam}(\tau) := \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$$

Интеграл на Риман на $f$ в $[a,b]$ наричаме

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\operatorname{diam}(\tau)\to 0} R_\tau$$

---

Точката $\xi_i$ от $i$-тия интервал е такава, че $f(\xi_i)$ е „добър" представител на функционалните стойности на $f$ в този интервал, като

$$f(x) \approx f(\xi_i) \quad \forall x\in[x_{i-1},x_i],$$

а това означава, че $f(x)$ е непрекъсната.
Може да се покаже, че интегруеми по Риман са точно тези функции, които са „почти непрекъснати".

Основни свойства на римановия интеграл:
(а) линейност
(б) адитивност
(в) монотонност

Преимущества:
(а) проста дефиниция
(б) хубави основни свойства
(в) „неложни" теореми за граничен преход:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Т-ма 1 Ако $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ в $[a,b]$ $\left(\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n]{} 0\right)$, то $f$ е непрекъсната в $[a,b] \Rightarrow f$ е интегруема и $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

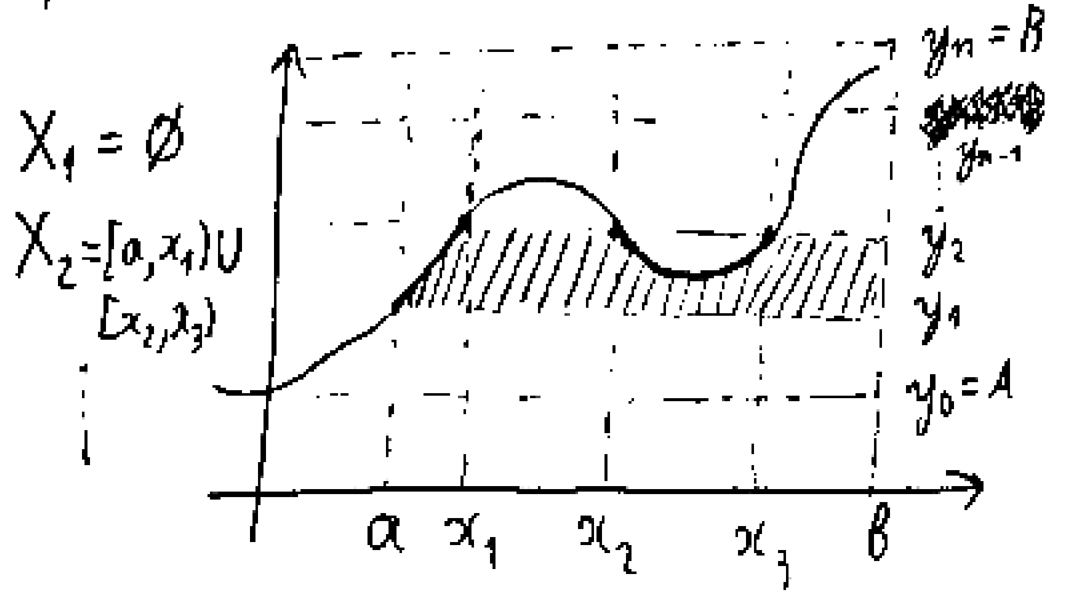
(г) Формула на Лайбниц-Нютон

$\int_a^b f'(x) = f(b)-f(a)$, когато $f$ е непрекъснато диференцируема в $[a,b]$

Недостатъци:
(а) съвкупността от интегруеми функции няма добра структура, например, тя не е затворена относно граничен преход
(б) съществуват важни функции, които не са интегруеми например функцията на Дирихле

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Опр.** (лебегов интеграл) Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е ограничена




$A,B: A<f(x)<B\ \forall x\in[a,b]$

Разглеждаме разбиването

$\eta: A=y_0<\dots<y_n=B$

$X_i := \{x\in[a,b]: y_{i-1}\le f(x)<y_i\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} X_i=[a,b]$ и $X_i\cap X_j=\emptyset,\ i\neq j$

Суми на Лебег:

$l_\eta := \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\, m(X_i)$ – малка сума,

$L_\eta := \sum_{i=1}^{n} y_i\, m(X_i)$ – голяма сума,

където $m(X_i)$ е мярката на множеството $X_i$.

$$0\le L_\eta - l_\eta = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(y_i-y_{i-1})}_{\le \operatorname{diam}(\eta)}\ \underbrace{m(X_i)}_{\ge 0} \le \operatorname{diam}(\eta)\, m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\Big) = \operatorname{diam}(\eta)\,\underbrace{m[a,b]}_{b-a}$$

$$= (b-a)\operatorname{diam}(\eta) \xrightarrow[\operatorname{diam}(\eta)\to 0]{} 0 \Rightarrow L_\eta - l_\eta \xrightarrow[\operatorname{diam}(\eta)\to 0]{} 0 \qquad (1)$$

Основното свойство на лебеговите суми е, че при добавянето на делящи точки $l_\eta\uparrow$, а $L_\eta\downarrow$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow \sup_\eta l_\eta = \inf_\eta L_\eta$. Тяхната обща стойност се нарича интеграл на Лебег

__Забл.__ Ф-циите, за които $m(X_i)$ е дефинирано $\forall\eta$, се наричат __измерими__

Основни свойства:

- линейност (а)
- адитивност (б)
- монотонност (в)
- граничен преход: (г)

<u>Т-ма</u> Ако $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_n \geq 0$ и са интегруеми по Лебег и още $f_n \to f$ поточково в $[a, b]$, то $f(x)$ е интегруема, при това

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(д) Формула на Нютон-Лайбниц

## V. Мярка на Лебег върху правата. Основни свойства. Множества с мярка 0.

Разглеждаме $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. Покритие на $S\subseteq I$ от интервали ще наричаме всяка съвкупност $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$, където $J_i$ са интервали и $\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \supseteq S$. Предполагаме, че $J_i$ са ограничени.

<u>Опр.</u> (външна лебегова мярка) За $S\subseteq I$ дефинираме величината $m^*(S):=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{diam}(J_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \supseteq S,\ J_i \text{ - интервали}\right\}$, където

$\operatorname{diam}\equiv d(J)$ е дължината на интервала $J$.

Величината $m^*(S)$ се нарича външна мярка на Лебег на $S$.

<u>Зад.</u> Ако с $\mathcal{P}$ означим съвкупността от всички подмножества на $I$, то $m^*: \mathcal{P}\to[0,+\infty)$

Елементарни свойства:

(а) $m^*(\emptyset)=0$

(б) $m^*(\{c\})=0 \quad \forall c\in\mathbb{R}$

(в) $m^*([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$

(г) $m^*([\alpha,\beta))=\beta-\alpha$

(д) $m^*((\alpha,\beta))=\beta-\alpha$

(е) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m^*(J_i)=\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i)$, стига $J_i\cap J_j=\emptyset$ за $i\neq j$

02.03.2018

<u>Т-ма</u> (полуадитивност) Нека $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ са подмножества на $[a,b]$. Тогава $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(S_n)$ ($\sigma$-полуадитивност)

<u>Д-во</u> Следва от деф. на $m^*$.

Нека $\{J_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ е покритие на $S_k$, $k=1,2,\dots$. Тогава $\{J_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^{\infty}$ е покритие на $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \leq \sum_{k,\ell=1}^{\infty} d(J_{k,\ell}) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} d(J_{k,\ell})\right).$$

Взимайки $\forall k$ inf по покритията $\{J_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ на $S_k$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(S_k).$$

□

<u>Лема</u> Всяко отв. множество $O \subseteq \mathbb{R}$ може да се представи като изброимо обединение на два по два непресичащи се отворени интервали, при това краищата не са в $O$:
$O = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$, $\alpha_j, \beta_j \notin O$ и $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset$ за $i \neq j$.

(някои от тези интервали може да са безкрайни.

<u>Идея за д-во</u> Ако $x_0 \in O$, намираме $(\alpha_0, \beta_0)$ - интервал около $x_0$, който го съдържа. Те или съвпадат, или не се пресичат.

Забелязваме, че понеже $m^*(\{c\})=0$, то в деф. на $m^*$ можем да гледаме само покрития от отв. интервали, което от горната лема се свежда до покритие с отв. множества.

Така установихме, че $m^*(S) = \inf_{O \supseteq S} m^*(O)$

$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(J_k)$, където $J_k$ са непресичащи се два по два интервали.

$\Rightarrow$ Ако $O$ е огр. отв. множество, $O = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$, непресичащи се два по два и

$$m^*(O) = \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j - \alpha_j) \qquad (1)$$

<u>Тв.</u> (пълна адитивност на външната мярка в-ху отв. мн.)
Ако $O_1, O_2, \ldots$ са отв. мн., съдържащи се в $I = [a,b]$, непресичащи се две по две, то

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(O_k).$$

Доказателството следва от (1)

<u>Т-ма</u> (монотонност на $m^*$)
Ако $S_1 \subseteq S_2 \subseteq I$, то $m^*(S_1) \leq m^*(S_2)$

<u>Д-во</u> Нека $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ е покритие на $S_2$ с интервали. Тогава то е покритие и на $S_1$, защото $S_1 \subseteq S_2$.
$\Rightarrow m^*(S_1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d(J_k)$ за всяко покритие $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $S_2$.
$\Rightarrow m^*(S_1) \leq \inf_{\bigcup J_k \supseteq S_2} \sum (J_k) = m^*(S_2)$. $\square$

<u>Зад.</u>
$K \subseteq [a,b]$ е компакт $\Leftrightarrow$ $O = \underbrace{[a,b]}_{\bigcup(\alpha_i,\beta_i)} \setminus K$ е отворено.

$K = [a,b] \setminus O \neq \bigcup_{i=1}^{\infty}[\gamma_i, \delta_i]$

Т-ма (пълна адитивност в-ху комп. множества)

Нека $K_1, K_2, \dots$ са компактни подмножества на $I=[a,b]$, които не се пресичат две по две. Тогава

(а) $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(K_j)\ \forall n$

(б) $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(K_j)$

Д-во (а) първо да забележим, че е достатъчно да установим твърдението за две комп. мн. Оттук (а) следва по индукция. Действително, да предположим, че $m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2)$ за всеки две непресичащи се компактни множества. Оттук получаваме за три мн. $K_1, K_2, K_3$

$m^*(K_1 \cup \overbrace{K_2 \cup K_3}^{K}) \overset{K \cap K_1 = \emptyset}{=} m^*(K_1) + m^*(K) \overset{K_2 \cap K_3 = \emptyset}{=} m^*(K_1) + m^*(K_2) + m^*(K_3)$

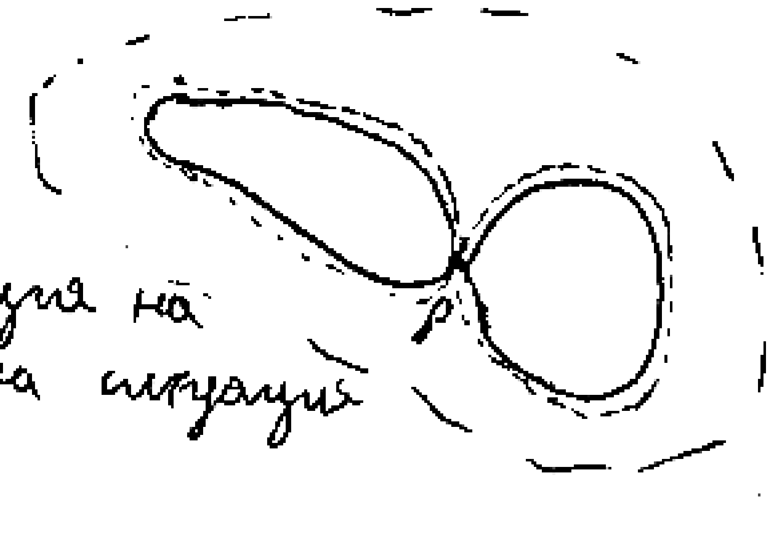
Ще установим, че ако $K_1$ и $K_2$ са компактни и непресичащи се, то $m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2)$. Ще сведем това твърдение към случая на отв. мн-ва, за който случай то е известно. Това свеждане е възможно благодарение на формулата

$$m^*(S) = \inf_{\text{отв. } O \supseteq S} m^*(O)$$

Нека $O$ е отв. мн. с $O \supseteq K_1 \supseteq K_2$. Разгл. разстоянието между $K_1$ и $K_2$:

$\rho = \inf\{(x_1 - x_2) : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}$

Да забележим, че $\rho > 0$.




Илюстрация на аналогична ситуация в $\mathbb{R}^2$

Действително, като приложим теоремата на Вайерщрас за непрекъснати функции върху компакт относно $|x_1 - x_2|$ на променливите $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, установяваме, че $\inf$ се достига в т. от $K_1 \times K_2$.

Следователно, $\rho > 0$, понеже $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Въвеждаме множествата

$$O_i = O \cap \underbrace{\{x_i \in \mathbb{R} : |x_i - y| < \tfrac{\rho}{2} \text{ за някое } y \in K_i\}}_{\text{Отворено, защото праобраз на непр. ф-я на отв. множество е отворено.}}, \quad i = 1, 2$$

$\Rightarrow$ $O_i$ също е отворено и $O_i \supseteq K_i$, $i = 1, 2$.

Преди да продължим, да забележим, че

$m^*(K_1 \cup K_2) \leq m^*(K_1) + m^*(K_2)$ от полуадитивността на външната мярка.

Следователно, за да установим равенството

$m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2)$ остава да покажем, че

$$m^*(K_1) + m^*(K_2) \leq m^*(K_1 \cup K_2).$$

От монотонността на $m^*$ следва, че

$$m^*(K_1) + m^*(K_2) \leq m^*(O_1) + m^*(O_2) \overset{O_1 \cap O_2 = \emptyset}{=} m^*(O_1 \cup O_2) \overset{O_1, O_2 \subseteq O}{\leq} m^*(O).$$

Така установихме, че

$$m^*(K_1) + m^*(K_2) \leq m^*(O) \quad \forall \text{ отв. } O \supseteq K_1 \cup K_2$$

$$\Rightarrow m^*(K_1) + m^*(K_2) \leq \inf_{\text{отв. } O \supseteq K_1 \cup K_2} m^*(O) = m^*(K_1 \cup K_2)$$

б) Да забележим, че пълната полуадитивност на $m^*$ влече $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(K_j)$.

За да установим обратното неравенство, за произволно фикс. $n \in \mathbb{N}$ получаваме посредством (а), че

$$\sum_{j=1}^{n} m^*(K_j) \overset{(a)}{=} m^*(\bigcup_{j=1}^{n} K_j) \overset{\text{монотонност на } m^*}{\leq} m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j).$$

Така установихме

$$\sum_{j=1}^{n} m^*(K_j) \leq m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) \; \forall n$$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} m^*(K_j)$ е сходящ и сумата му не надминава $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j)$

$\square$

<u>Т-ма</u> Нека $K \subseteq I$ е компакт. Тогава

$$m^*(K) + m^*(I \setminus K) = m^*(I) = d(I)$$

<u>Лема</u> За всяко $\varepsilon > 0$ $\exists \{J_k\}_{k=1}^{n} : J_k \subseteq I$ и $J_k$ са интервали, за които $\bigcup_{k=1}^{n} J_k \supseteq K$ ($K$ е компакт) и $m^*((\bigcup_{k=1}^{n} J_k) \setminus K) \leq \varepsilon$.

Д-во за упражнение

<u>Д-во</u> (на теоремата) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава, от лемата, съществува мн. $U = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$, където $J_k$ са интервали, такива, че $m^*(I) = m^*(K \cup (I \setminus K)) \leq m^*(K) + m^*(I \setminus K)$.

Понеже $I \setminus K = (I \setminus U) \cup (U \setminus K) \Rightarrow m^*(I \setminus K) \leq m^*(I \setminus U) + m(\overset{\leq \varepsilon}{U \setminus K}) \leq m^*(I \setminus U) + \varepsilon$

(1)

Следователно $m^*(K) + m^*(I\setminus K) \le m^*(\mathcal{U}) + m^*(I\setminus\mathcal{U}) + \varepsilon$.

Да забележим, че след като $\mathcal{U}$ е обединение на краен брой непресичащи се интервали, съдържащи се в $I$, то $I\setminus\mathcal{U}$ е обединение на краен брой интервали. Тогава $m^*(\mathcal{U})$ и $m^*(I\setminus\mathcal{U})$ представляват сумите от дължините на съответните съставляващи ги интервали. Оттук следва, че $m^*(\mathcal{U}) + m^*(I\setminus\mathcal{U}) = d(I)$.

Сега от (3) следва, че

$$m^*(K) + m^*(I\setminus K) \le d(I) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^*(K) + m^*(I\setminus K) \le d(I) = m^*(I)$$

□

<u>Опр.</u> Нека $S \subseteq I$. Величината $m_*(S) := d(I) - m^*(I\setminus S)$ се нарича <u>вътрешна мярка</u> на $S$.

<u>Зав.</u> Непосредствено се вижда, че вътрешната мярка

* е монотонна: $m_*(S_1) \le m_*(S_2)$ за $S_1 \subseteq S_2 \subseteq I$
* $m_*(S) \le m^*(S)$

И двете следват от монотонността на външната мярка.

<u>Опр.</u> Казваме, че $S \subseteq I$ е <u>измеримо</u> множество, ако $m_*(S) = m^*(S)$. В такъв случай, общата стойност на $m_*(S)$ и $m^*(S)$ се нарича <u>лебегова мярка</u> на $S$ и се означава чрез $m(S)$, т.е.

$$m(S) := m_*(S) = m^*(S).$$

Зад. Според последното, така дефинирахме лебегова мярка върху интервала $I=[a,b]$. Може да се провери, че ако $S \subseteq I \subseteq I' = [\alpha, \beta]$, то стойността на $m_*$, пресметнати посредством $I'$, съвпада с тази в-ху $I$.

Всъщност $m$ представлява рестрикцията на $m^*$ в-ху съвкупността от подмножества от $I$, в-ху която $m^*$ има „хубави" свойства.

В частност, от това, че $m$ е рестрикция на $m^*$ следва, че $m$ наследява всички свойства на $m^*$. В това число влизат

* пълна полуадитивност: $m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(S_j)$

* монотонност: $S_1 \subseteq S_2$ - измерими $\Rightarrow m(S_1) \leq m(S_2)$.

Зад. Определението за измеримост всъщност е еквив. на свойството

$$m_*(S) = d(I) - m^*(I \setminus S) = m^*(S).$$

Виждаме, че едно подмножество $S \subseteq I$ е измеримо $\Leftrightarrow$
$m^*(S) + m^*(I \setminus S) = m^*(I) = d(I)$ (4)

Оттук следва, че всеки компакт е измерим, както и че допълнението на измеримо множество е измеримо, защото лявата страна на (4) е инвариантна при смяната на $S$ с $I \setminus S$. Оттук следва, че щом компактите са измерими, то и отворените ограничени множества също са измерими.

09.03.2018 **Тв** Нека $S \subseteq I$. Тогава

$$m_*(S) = \sup_{\text{комп } K \subseteq S} m^*(K).$$

<u>Забел.</u> Всъщност, понеже компактите са измерими, имаме $m^*(K) = m(K)$.

<u>Т-ма</u> (Свръхадитивност на $m_*$)

Нека $S_1, \dots, S_n$ са подмножества на $I$, които не се пресичат две по две. Тогава

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(S_j).$$

<u>Д-во.</u> Нека $n \in \mathbb{N}$. Фиксираме компакти $K_j \subseteq S_j$ за $j = 1, \dots, n$. Тогава, поради монотонността на $m_*$, имаме, че

$m_*(K_j) \leq m_*(S_j) \ \forall j$

$m^*(K_j) = m_*(K_j)$, защото компактите са измерими.

Тогава $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_*(K_j) = \sum_{j=1}^{n} m^*(K_j) \overset{K_i \cap K_j = \emptyset}{=} m^*\Big(\overbrace{\bigcup_{j=1}^{n} K_j}^{\text{компакт}}\Big) = m_*\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right)$.

Така установихме, че

$$\sum_{j=1}^{n} m^*(K_j) = m_*\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right) \leq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right).$$

$$\Rightarrow \sup_{\text{комп. } K_j \subseteq S_j} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m^*(K_j)}_{= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sup_{K_j \subseteq S_j,\ K_j\text{-комп.}} m^*(K_j)}_{S_j}} \leq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)$$

Така установихме, че

$$\sum_{j=1}^{n} m_*(S_j) \le m_*\left(\bigcup_{j=1}^{n} S_j\right) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} m_*(S_j) \le m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)$$ по познатия начин.

$\square$

<u>Т-ма</u> (пълна адитивност на $m$)

Нека $S_1, S_2, \dots$ са измерими подмножества на $I$, които не се пресичат две по две. Тогава $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ също е измеримо и $m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(S_j)$.

<u>Д-во</u> За да докажем, че $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ е измеримо, ще покажем, че $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)$. Това равенство, заедно с равенствата от теоремата, ще бъдат установени едновременно. Имаме

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \overset{(*)}{\le} m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \underset{\substack{\text{пълн.-}\\ \text{адитивност}\\ \text{на } m^*}}{\overset{(\#)}{\le}} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(S_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(S_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(S_j) \underset{\substack{\text{свръхад.}\\ \text{на } m_*}}{\le} m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right).$$

Следователно навсякъде горе имаме равенства.

В $(*)$ имаме равенство, следователно $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ е измеримо.

От $(\#)$ с равенство следва второто твърдение на теоремата.

$\square$

<u>Лема</u> (~~[illegible]~~ критерий за измеримост) Множеството $S \subseteq I$ е измеримо $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ отв. $O$ и комп. $K$: $K \subseteq S \subseteq O$ и $m^*(O \setminus K) < \varepsilon$.

<u>Забел.</u> Всъщност $O \setminus K$ е отв. и $\Rightarrow$ измеримо (без ограничение можем да считаме, че $O$ е огр.)

**Д-во** За упражнение, основава се на изразяването на $m^*$ и $m_*$ чрез inf по отв. мн. и sup по комп. мн. и още на $m^*(O\setminus K) = m(O\setminus K) = m(O) - m(K)$

**Т-ма** Ако $S_1$ и $S_2$ са измерими, то измерими са и

(а) $S_1 \cup S_2$
(б) $S_1 \cap S_2$
(в) $S_1 \setminus S_2$

**Д-во** (а) Първо ще докажем, че $S_1 \cup S_2$ е измеримо. Нека $\varepsilon > 0$ е фикс.. Щом $S_1$ и $S_2$ са измерими, то от НДУ за измеримост следва, че $\exists$ отв. $O_i$ и комп. $K_i$ такива, че $K_i \subseteq S_i \subseteq O_i$ и, освен това, $m^*(O_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Полагаме $S = S_1 \cup S_2$, $O = O_1 \cup O_2$ - отв. и $K = K_1 \cup K_2$ - комп. Ясно е, че $K \subseteq S \subseteq O$. За разликата $O\setminus K$ имаме

$$O\setminus K = (O_1 \cup O_2)\setminus(K_1 \cup K_2) \subseteq (O_1\setminus K_1) \cup (O_2 \setminus K_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^*(O\setminus K) \le m^*((O_1\setminus K_1)\cup(O_2\setminus K_2)) \overset{\text{полуад.}}{\le} m^*((O_1\setminus K_1)) + m^*((O_2\setminus K_2)) < \varepsilon$$

От достатъчността на критерия за измеримост $\Rightarrow S$ е изм.

(б) Нека $I \supseteq S_1$ и $I \supseteq S_2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ е затв. интервал

От формулите на де Морган $\Rightarrow$ $$I\setminus(S_1 \cap S_2) = \underbrace{\underbrace{(I\setminus S_1)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{(I\setminus S_2)}_{\text{изм.}}}_{\text{от (а)} \Rightarrow \text{изм.}}$$

$\Rightarrow S_1 \cap S_2$ е измеримо

(в) Накрая, от $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap (I \setminus S_2) \Rightarrow S_1 \setminus S_2$ е измеримо

$\square$

**Т-ма** Нека $S_1, S_2, \ldots$ са измерими подмножества на $I$. Тогава измерими са и подмножествата

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j$$

**Д-во** Ще представим $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ като обединение на изобр., непресичащи се 2 по 2 подмножества на $I$. Тогава, според вече доказаната теорема, ще имаме, че $S$ е измеримо.

Представянето се построява по следния начин:

Полагаме $S_1' = S_1$ и $S_2' = S_2 \setminus S_1$ и изобщо $S_j' = S_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} S_i\right), j \geq 2$.

Ясно е, че $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j'$, благодарение на предната теорема, е измеримо.

Относно сечението, използваме формулите на де Морган:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j = I \setminus \left(I \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j\right)\right) = I \setminus \overbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(I \setminus S_j)}_{\text{измер.}}\right)}^{\text{измер}} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \text{ е измеримо.}$$

$\square$

---

Нека $X$ е множество

**Опр.** Казваме, че множеството $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ е алгебра, ако

1) $\mathcal{A}$ е непразно
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

**Опр.** Казваме, че множеството $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ е $\sigma$-алгебра, ако

1) $\mathcal{F}$ е непразно
2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$
3) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

**Заб.** Последните две теореми показват, че съвкупността от измерими по Лебег подмножества на краен. затв. интервал е $\sigma$-алгебра. Понякога тя се означава с $\mathcal{L}_I$, $I=[a,b]$

Конструкция на лебеговата мярка в-ху $\mathbb{R}$:

Нека $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ е съвкупност от крайни затворени интервали, имащи най-много една обща точка два по два и $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \mathbb{R}$.

<u>Опр.</u> Казваме, че $S \subseteq \mathbb{R}$ е <u>измеримо по Лебег</u>, ако $S \cap I_k$ е измеримо (по Лебег) подмножество на $I_k$ $\forall k$. В такъв случай полагаме

$$m(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap I_k)$$

$m(S)$ наричаме <u>лебегова мярка</u> на $S$.

<u>Заб.</u> Излиза, че $\mathbb{R}$ е измеримо и $m(\mathbb{R}) = \infty$

<u>Зад.1</u> (за изпит) Докажете, че:

(а) горната деф. не зависи от избора на $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$

(б) съвкупността от измерими по Лебег множества е $\sigma$-алгебра

(в) Лебеговата мярка в-ху $\mathbb{R}$ е пълно адитивна

Множества с мярка 0:

<u>Опр.</u> Казваме, че $S \subseteq \mathbb{R}$ е множество с мярка 0, ако $S$ е измеримо и $m(S) = 0$

Заб. Ако $S$ е ограничено и $m^*(S)=0$, то $S$ е измеримо и $m(S)=0$. Това веднага следва от $0 \le m_*(S) \le m^*(S)=0$

Тв. $S \subseteq \mathbb{R}$ е множество с мярка $0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, $J_k$-инт.: $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \supseteq S$ и $\sum_{k=1}^{\infty} d(J_k) < \varepsilon$.

Т-ма Изброимо обединение на множества с мярка 0 е също множество с мярка 0.

Д-во Наистина, нека $S_1, S_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$ са измерими и $m(S_j)=0\ \forall j$. Тогава, както знаем, обединението $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ също е измеримо и от полуадитивността на $m$ $\Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(S_j) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)=0$.

Опр. Казваме, че дадено свойство е в сила почти навсякъде (п.н.) в множеството $E$, ако то е в сила навсякъде в $E$ с изключение на точките от множеството $E_0$ с $m(E_0)=0$

Пр.1 $f(x)=0$ п.н. в $[a,b]$ означава, че $\operatorname{supp} f$ (носител) е измеримо и има мярка 0.

Пр.2 $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ п.н. в $[a,b]$ означава, че

$m\{x\in[a,b] : f_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\} = 0$

III. Общо понятие за мярка. Измерими множества. Основни свойства

Основни свойства на σ-алгебрите:

Нека $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ е σ-алгебра. Тогава:

(а) Ако $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F}$

Действително, имаме $\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j = X \setminus (X \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j)) = X \setminus \overbrace{(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(X \setminus S_j)}_{\in \mathcal{F}})}^{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

(б) $\emptyset \in \mathcal{F}$

Действително, щом $\mathcal{F}$ е непразно, то $\exists S \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow S^c = X \setminus S \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset = S \cap S^c \in \mathcal{F}$

(в) $X \in \mathcal{F}$

Това следва от $X = S \cup S^c \in \mathcal{F}$

(г) Ако $S_1$ и $S_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow S_1 \setminus S_2 \in \mathcal{F}$

Тук имаме, че $S_1 \setminus S_2 = \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{S_2^c}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

__Заб.__ (г) се използва вместо аксиома 3 в деф. на ~~σ-алгебра~~ σ-пръстен

__Опр.__ Нека $X$ е мн., а $\mathcal{F}$ е σ-алгебра $\subseteq 2^X$. Наредената двойка $(X, \mathcal{F})$ ще наричаме __измеримо пространство__, а елементите на $\mathcal{F}$ - __измерими множества__.

__Пр.1__ $([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ са измерими пространства

**Опр.** Нека $(X, \mathcal{F})$ е измер. пр-во. Изображение $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ със свойствата

(а) $\mu(\emptyset) = 0$

(б) пълна адитивност – $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $S_j \cap S_i = \emptyset$ за $i \neq j$, то $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$

се нарича <u>мярка</u> в-ху $(X, \mathcal{F})$

В такъв случай, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ се нарича пространство с мярка.

<u>Пр. 1</u> $([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}, m)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ са пр-ва с мярка

Основни св-ва на мярката:

(а) монотонност: $\underset{\in \mathcal{F}}{S_1} \subseteq S_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(S_1) \leq \mu(S_2)$

Действително, като вземем предвид, че $S_2 = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1)$ и използваме пълната адитивност на $\mu$, получаваме

$\mu(S_2) = \mu\{S_1 \cup (S_2 \setminus S_1)\} = \mu(S_1) + \mu(S_2 \setminus S_1) \geq \mu(S_1)$

(б) Пълна полуадитивност: $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$

Представяме $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ като обединение на измерими, непресичащи се две по две множества:

$S_1' = S_1$ ; $S_j' = S_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} S_i\right)$, $j > 1$

Тогава $S_j' \in \mathcal{F}$ $\forall j$ и $S_i' \cap S_j' = \emptyset$ за $i \neq j$ и $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j' = S$

Сега от пълната адитивност на $\mu \Rightarrow \mu(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j') \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$, защото $S_j' \subseteq S_j$

(в) $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $S_1 \subseteq S_2 \ldots \Rightarrow \mu(S_j) \uparrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)$

Разглеждаме $S_1' = S_1$, $S_j' = S_j \setminus S_{j-1}$, $j > 1$ – измерими и непр. се две по две.

Имаме, че $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j' = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j = S$. Тогава от пълната адитивност на $\mu \Rightarrow \mu(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j')$ (*)

Остава да забележим, че $\sum_{j=1}^{n} \mu(S_j') = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} S_j'\right) = \mu(S_n)$. Сега от (*) $\Rightarrow \mu(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_n') \to \mu(S)$,

а от монотонността $\Rightarrow \mu(S_n) \leq \mu(S_{n+1})$.

(г) $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots$ и $\boxed{\mu(S_1) < \infty} \Rightarrow \mu(S_j) \underset{j \to \infty}{\downarrow} \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j\right)$

<u>Забел.</u> Без предположението, че $\mu(S_1) < \infty$ (или, по-общо, $\mu(S_{j_0}) < \infty$ за някое $j_0$), (г) престава да бъде вярно

16.03.2018 $\underline{\text{IV}}$. Измерими ф-ции. Основни свойства.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

$a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$

<u>Опр.</u> Нека $(X, \mathcal{F})$ е измеримо пространство.
Казваме, че $f: X \to [-\infty; +\infty]$ е $\mathcal{F}$-измерима,
ако е измеримо множеството
$\{x \in X : f(x) > c\}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

аналогично се дефинира $a(-\infty)$

остават неопределени изразите $+\infty - (+\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{1}{0}$

<u>Заб.</u> За краткост, вместо $\{x \in X : f(x) > c\}$ ще пишем $\{x : f > c\}$

<u>Т-ма 1</u> Следните твърдения са еквивалентни:

(а) $f(x)$ е $\mathcal{F}$-измерима

(б) $\{x : f \leq c\} \in \mathcal{F}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

(в) $\{x : f \geq c\} \in \mathcal{F}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

(г) $\{x : f < c\} \in \mathcal{F}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Ако $f(x)$ е $\mathcal{F}$-измерима, то множеството

$\{x : f = c\} \in \mathcal{F}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Обратното не е вярно

<u>Д-во</u> <u>(а) ⇒ (б)</u>

По деф. $f(x)$ е $\mathcal{F}$-измерима точно тогава, когато
$\{x : f(x) > c\} \in \mathcal{F}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

остава да забележим, че $\{x : f \le c\} = X \setminus \{x : f > c\} \in \mathcal{F}$.

<u>(а) ⇒ (в)</u> Тук ще използваме, че

$$\{x : f \ge c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f > c - \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

<u>(в) ⇒ (г)</u> $\{x : f < c\} = X \setminus \underbrace{\{x : f \ge c\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

Аналогично се установяват и останалите импликации. Относно последното твърдение, да забележим, че

$$\{x : f = c\} = \underbrace{\{x : f \ge c\}}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\{x : f \le c\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

□

<u>Зад</u> От т-мата следва, че точно за измеримите в смисъл на σ-алгебрата $\mathcal{L}$ са измерими по Лебег мн-вата,

$$\{x \in [a, b] : y_{i-1} \le f(x) < y_i\},$$

дефинирани за сумите на Лебег. В такъв случай имаме, че интегралът на Лебег съществува поне за всички ограничени $\mathcal{L}$-измерими функции.

<u>Тв.2</u> Нека $(X, \mathcal{F})$ е изм. пространство. Всяка функция, която е тъждествено константа в-ху $X$, е измерима

Д-во Нека $f(x) = a \in \mathbb{R} \; \forall x \in X$

ще проверим деф. за $\mathcal{F}$-измеримост. Нека $c \in \mathbb{R}$.

Имаме, че $\{x : \underset{a}{\overset{\shortparallel}{f}} > c\} = \begin{cases} \overset{\mathcal{F}}{\overset{\in}{X}}, & a > c \\ \underset{\mathcal{F}}{\underset{\in}{\emptyset}}, & a \leq c \end{cases}$. И в двата случая $\{x : f > c\} \in \mathcal{F}$.

□

Опр. Нека $S \subseteq X$. Ф-ята

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in X \setminus S \end{cases}$$

се нарича характеристична ф-ция на мн. $S$

Тв.3 Нека $(X, \mathcal{F})$ е изм. пространство. Тогава $\chi_S$ е $\mathcal{F}$-измерима $\Leftrightarrow S \in \mathcal{F}$ ($S$ е измеримо).

Д-во Непосредствено следва от деф.

Т-ма 4 Всяка непр. ф-ция, дефинирана в-ху краен. затв. интервал, е изм. по Лебег.

Д-во Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непр. Тогава $\forall c \in \mathbb{R}$ множеството

$\{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}$ е затворено $\Rightarrow$ измеримо по Лебег. Предвид т-ма 1 $\Rightarrow f(x)$ е измерима по Лебег

□

Т-ма 5 Нека $(X,\mathcal{F})$ е изм. и $f: X \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-измерима. Нека още $a \in \mathbb{R}$. Тогава $\mathcal{F}$-измерими са и функциите

(а) $f(x)+a$

(б) $a \cdot f(x)$

(в) $|f(x)|$

(г) $f^2(x)$

(д) $\frac{1}{f(x)}$, стига $f(x) \neq 0$ в-ху $X$.

Заб. Твърденията остават в сила и за $f: X \to [-\infty, +\infty]$.

Д-во (а) Нека $c \in \mathbb{R}$. Тогава

$$\{x : f + a > c\} = \{x : f > \underbrace{c-a}_{\in \mathbb{R}}\} \in \mathcal{F},$$ защото $f(x)$ е $\mathcal{F}$-измерима

(б) Ако $a = 0$, твърдението се свежда към т-ма 1.
Случаите $a > 0$ и $a < 0$ се разглеждат отделно.
Първият е аналогичен на (а), а за втория ще използваме т-ма 1.

(в) Нека $c \in \mathbb{R}$ е фикс. Имаме

$$\{x : |f| > c\} = \begin{cases} X, & c < 0 \\ \underbrace{\{x : f > c\}}_{\mathcal{F}} \cup \underbrace{\{x : f < -c\}}_{\mathcal{F}}, & c \geq 0 \end{cases}$$

(г) Тук имаме за $c\in\mathbb{R}$ следните възможности:

$$\{x: f^2>c\} = \begin{cases} X, & c<0 \\ \underbrace{\{x: |f|>\sqrt{c}\}}_{\in\mathcal{F} \text{ от (в)}}, & c\geq 0 \end{cases}$$

д) Аналогично

$\square$

<u>Т-ма</u> Нека $(X,\mathcal{F})$ е изм. пространство и $f,g: X\to\mathbb{R}$, приемащи само крайни стойности, са $\mathcal{F}$-измерими. Тогава са измерими и функциите

(а) $f+g$

(б) $fg$

(в) $f/g$, стига $g\neq 0$ за $x\in X$

<u>Заб</u> Твърденията остават в сила за $f,g: X\to[-\infty,+\infty]$, стига ф-циите в (а) и (в) да се добре деф. в $X$

<u>Д-во</u>

(а) Нека $c\in\mathbb{R}$. За да докажем, че $\{x: f+g>c\}$ е в $\mathcal{F}$, забелязваме, че то може да се запише и $\{x: f>c-g\}$. Ф-цията $c-g$ е измерима предвид тв. 1 и т-ма 5 (а) и (б). В такъв случай е дост. да покажем, че каквито и да са

изм. ф-ции $f$ и $g$, мн-вото $\{x: f>g\}$ е измеримо.
Да забележим, че $f(x)>g(x) \Leftrightarrow \exists r\in\mathbb{Q}: f(x)>r>g(x)$,
защото $\mathbb{Q}$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{R}$. Знаем, че $\mathbb{Q}$ са изброимо много. Нека $r_1,\dots,r_n,\dots$ е една тяхна подредба.
В такъв случай имаме, че $\{x: f(x)>g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{x: f(x)>r_n>g(x)\}}_{\{x: f>r_n\}\cap\{x: g<r_n\}}$.

$\Rightarrow \{x: f>g\}$ е измеримо.

$\{x: f>r_n\} \in \mathcal{F}$, $\{x: g<r_n\} \in \mathcal{F}$

(б) Тук използваме представянето

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right].$$

Според (а) $f+g$ е изм., а от (а) и 5(б) $\Rightarrow f-g$ е изм.
От т-ма 5(г) $\Rightarrow (f\pm g)^2$ е изм. Оттук, благодарение на (а) и т-ма 5(б) $\Rightarrow fg$ е изм.

(в) Тук използваме, че $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$ и че $g(x)^{-1}$ е измерима, благ. на 5(g). От (б) $\Rightarrow \frac{f}{g}$ ~~е~~ измерима.

<u>Т-ма</u> Нека $(X,\mathcal{F})$ е измеримо и са дадени
$f_n: X\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ са измерими. Тогава са измерими

(а) $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

(б) $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

(в) $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$

(г) $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$

(д) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, стига да същ. $\forall x\in X$

Д-во:

(а) Разгл. $g_1 : X \to [-\infty, +\infty]$, определено чрез

$g_1(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ за фикс. $x \in X$. Нека $c \in \mathbb{R}$ е фикс.

Ще докажем, че $\{x : g_1 > c\} \in \mathcal{F}$. Използваме представянето

$$\{x : g_1(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f_n(x) > c\}}_{\in \mathcal{F},\ f_n \text{ е изм. } \forall n}$$

(б) Свеждаме към (а) посредством

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = -\sup_{n\in\mathbb{N}}\{-f_n(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Тук още използваме и т-ма 5(б).

(в) По деф. $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{j\geq n} f_j(x)\right)$ за фикс. $x$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{j\geq n} f_j(x)\right) = \underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\overbrace{\sup_{j\geq n} f_j(x)}^{\text{изм. } \forall n, \text{ от (а)}}\big)}_{\text{измер., от (б)}} \in \mathcal{F}$$

г) Тук използваме, че за фикс. $x \in X$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{j\geq n} f_j(x)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\big(\overbrace{\inf_{j\geq n} f_j(x)}^{\in\mathcal{F}}\big) \in \mathcal{F}$$

д) Твърдението следва непосредствено от г) (или (в)), като вземем предвид, че $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \left(= \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\right)$

□

Ш. Ако $(X,\mathcal{F})$ е измеримо и $f,g$ са измерими, то
$f,g: X \to [-\infty,+\infty]$
измерими са и функциите $\max\{f(x),g(x)\}$ и $\min\{f(x),g(x)\}$

## V. Интеграл на Лебег. Основни свойства.

Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка. Нека $S \in \mathcal{F}$. Разглеждаме $\chi_S$. Както знаем, $\chi_S$ е $\mathcal{F}$-измерима. Очевидно $\chi_S \geq 0 \ \forall x$.

<u>Опр.</u> За $S \in \mathcal{F}$, полагаме $\int\limits_X \chi_S \, d\mu = \mu(S)$, наричаме

$\int\limits_X \chi_S \, d\mu$ <u>интеграл на Лебег</u> на $\chi_S$ относно мярката $\mu$.

<u>Опр.</u> Всяка крайна линейна комбинация на ХФ на подмножества на $X$ ще наричаме <u>проста функция</u> над $X$. Тяхната съвкупност ще означаваме чрез $SF(X)$

<u>Заб.</u> Така всяка проста ф-ция има вида

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{S_i}(x),$$

където $S_i \subseteq X$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, а $S_i$ - измерими.

<u>Заб.</u> Накратко, прости функции са точно тези, които са измерими и имат краен брой различни крайни стойности

<u>Опр.</u> <u>Канонична форма</u> на проста функция над $X$ наричаме $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} d_i \chi_{T_i}(x)$, където $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ са различните стойности, които $\varphi$ приема, а

$$T_i = \{x \in X : \varphi(x) = d_i\}, \ i = 1, \dots, m.$$

**Забл.** Имаме, че $T_i \cap T_j = \emptyset$ за $i \neq j$, $T_i$ са измерими (защото $\varphi$ е измерима) и $\bigcup_{i=1}^{m} T_i = X$.

Означаваме с $SF^+(X)$ неотрицателните прости функции.

**Опр.** Интеграл на Лебег на $\varphi \in SF^+(X)$ спрямо мярката $\mu$ наричаме

$$\int \varphi\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(T_i),$$

където $\varphi \in SF^+(X)$ има каноничното представяне

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{T_i}(x).$$

**Забл.** Сумата е винаги добре дефинирана, защото $\alpha_i \geq 0\ \forall i$ и $\Rightarrow$ не възниква неопределеност, ако $\mu(T_i) = +\infty$ за някои $i$. Също така по деф. $0 . \infty = 0$ и тогава по деф. имаме $\int 0\, d\mu = 0$.

**Т-ма** (Линейност и монотонност)

Нека $\varphi, \psi \in SF^+(X)$ и $c > 0$. Тогава

(а) $c\varphi \in SF^+(X)$ и $\int c\varphi\, d\mu = c\int \varphi\, d\mu$

(б) $\varphi + \psi \in SF^+(X)$ и $\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$.

(в) Ако $\varphi(x) \leq \psi(x)\ \forall x \in X$, то $\int \varphi\, d\mu \leq \int \psi\, d\mu$.

**Д-во** Нека канон. форми на $\varphi$ и $\psi$ са съответно

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}(x)$$

(а) $c\varphi(x) = \sum c a_i \chi_{A_i}(x) \Rightarrow \int c\varphi\, d\mu = \sum c a_i \mu(A_i) = c \sum a_i \mu(A_i) := c \int \varphi\, d\mu$

13.03.2018 (б) адитивност на лебегов интеграл за прости неотр. ф-ии

Търсим канон. форма на $\varphi+\psi$, ако разлагаме с

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x) \text{ и } \psi(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}(x)$$

За тази цел въвеждаме множествата $C_{ij}=A_i\cap B_j$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

Основни свойства на $C_{ij}$:

1) $C_{ij}$ е измеримо $\forall i,j$, защото са сечения на две измерими функции

2) $\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}=\bigcup_{j=1}^{n}(A_i\cap B_j)=A_i\cap(\bigcup_{j=1}^{n} B_j)=A_i\cap X=A_i \; \forall i$

3) Аналогично, $\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}=B_j \; \forall j$

4) $\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}=X$, защото $\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}\right)=\bigcup_{i=1}^{m} A_i=X$

$C_{ij}$ са две по две непресичащи се

Следователно

$$\varphi=\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}\overset{2)}{=}\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}}\overset{C_{ij}\cap C_{kp}=\emptyset}{=}\sum_{i=1}^{m} a_i\sum_{j=1}^{n}\chi_{C_{ij}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\chi_{C_{ij}}$$

Анал. получаваме, че

$$\psi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_j\chi_{C_{ij}}$$

Следователно,

$$\varphi+\psi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_i+b_j)\chi_{C_{ij}}$$

Нека $c_1,\dots,c_p$ са разл. ел. на мн-вото $\{a_i+b_j : i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$

Да положим сега $D_K = \{x \in X : \varphi(x) + \psi(x) = c_K\} = \bigcup\limits_{a_i + b_j = c_K} C_{ij}$, $K = 1, p$

Множествата $D_K$ са измерими, защото са обединения на измерими множества. Също така да отбележим, че $D_K \cap D_\ell = \emptyset$, $K \neq \ell$ и $\bigcup\limits_{K=1}^{p} D_K = X$.

От опр. на интеграл от неотрицателна $\overset{\text{проста}}{\text{функция}}$

$$\Rightarrow \int (\varphi + \psi)\,d\mu = \sum_{K=1}^{p} c_K \mu(D_K) \underset{\text{адитивна}}{\overset{\text{не пълно}}{=}} \sum_{K=1}^{p} c_K \mu\Big(\bigcup_{a_i + b_j = c_K} C_{ij}\Big) =$$

$$= \sum_{K=1}^{p} c_K \sum_{a_i + b_j = c_K} \mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu(C_{ij}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} \mu(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(\sum_{i=1}^{m} \mu(C_{ij})\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}}_{A_i \text{ (2 свойство)}}\Big) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}}_{B_j \text{ (3 свойство)}}\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j)$$

$$= \int \varphi\,d\mu + \int \psi\,d\mu$$

(в) доказва се аналогично

Сл. 1 Нека $\varphi \in SF^+$ и $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \chi_{C_i}$, $c_i \geq 0$, и $C_i$ са измерими

Тогава $\int \varphi\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \mu(C_i)$

Д-во следва от линейността на интеграла за неотр. проста функция:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{C_i}\right) d\mu \overset{\text{лин.}}{=} \sum_{i=1}^{m} c_i \underbrace{\int \chi_{C_i} d\mu}_{\mu(C_i)}$$

$\square$

На следващата стъпка ще деф. интеграл от измерима отрицателна функция

$(\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, накратко $\mathcal{M}(X)$, ще означаваме съвкупността от $\mathcal{F}$-измерими функции, определени в $X$.

А с $\mathcal{M}^+(X,\mathcal{F})$, накратко $\mathcal{M}^+(X,\mathcal{F})$, ще озн. съвкупността от неотр. $\mathcal{F}$-измерими ф-ции, деф. в $X$.

<u>Опр.</u> ($\int$ от $\mathcal{M}^+$) Нека $f \in \mathcal{M}^+(X)$

Полагаме $\int f d\mu = \int_X f d\mu := \sup\left\{ \int_X \varphi d\mu \mid \varphi(x) \le f(x)\ \forall x \in X, \varphi \in SF^+(X) \right\}$

<u>Заб.</u> Възможно е $\int f d\mu = +\infty$

<u>Заб.</u> Ако $f \in SF^+(X)$, то ~~[illegible]~~ $f \in \mathcal{M}^+(X)$ и нейният интеграл в смисъла на горната деф. съвпада с вече въведения инт. от $SF^+$.

Това следва от монотонността на инт. от $SF^+$!

$\left(f, \varphi \in SF^{+} \text{ и } \varphi \leq f \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \leq \int f \, d\mu\right)$.

<u>Опр.</u> Нека $E \in \mathcal{F}$. Полагаме

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \chi_E \, d\mu,$$

$f \in M^{+}(X)$

<u>Лема</u> $(SF^{+} \uparrow M^{+})$ Ако $f \in M^{+}(X)$, то $\exists \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \varphi_n \in SF^{+}(X)$: $\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\uparrow} f(x) \ \forall x \in X$

<u>Д-во</u> Схема на д-вото:

Въвеждаме мн-вата $T_{n,k} := \{x \in X : k 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) 2^{-n}\}$, $k = 0, \ldots, n2^{n}-1, n \in \mathbb{N}$ и $T_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$.

Проверява се, че

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n-1} k 2^{-n} \chi_{T_{nk}} + n \chi_{T_n}$$

са в $SF^{+}$ и $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \ \forall x$ и $\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} f(x) \ \forall x$

Пълното д-во остава за упражнение

$\square$

<u>Т-ма</u> (Бепо Леви) Нека $f_n$ са неотр. измер. ф-ции ($f \in M^{+}(X)$), $n = 1, 2, \ldots$ и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \ \forall x \in X$. Тогава $\exists f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \ \forall x \in X$ и $\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$. $f \in M^{+}(X)$

Д-вото ще дадем в следващата тема

Като следствие от тази теорема получаваме

**Тв. 5** Ако $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} f(x)\ \forall x$, $f \in M^+(X)$, $\varphi_n \in SF^+(X)\ \forall n$,

то $\int \varphi_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$

**Т-ма** (линейност на интеграла в-ху $M^+$)

Нека $f, g \in M^+(S)$ и $c > 0$. Тогава, както знаем,

$f+g,\ cf \in M^+(X)$ и, освен това,

(а) $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(б) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

**Д-во**

(а) следва от определението:

$$\int cf \, d\mu := \sup\left\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \le cf,\ \varphi \in SF^+ \right\} \overset{c>0 \text{ и лин. в-ху } SF^+}{=}$$

$$= \sup\left\{ c \int \frac{1}{c}\varphi \, d\mu : \frac{1}{c}\varphi \le f,\ \frac{1}{c}\varphi \in SF^+ \right\} \overset{\psi := \frac{1}{c}\varphi}{=} \sup\left\{ c\int \psi \, d\mu : \psi \le f,\ \psi \in SF^+ \right\}$$

$$= c \int f \, d\mu$$

(б) Прилагайки лемата, констр. две редици от $SF^+$ такива, че

$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} f(x)\ \forall x$ и $\psi_n(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} g(x)\ \forall x$. Тогава

$$\varphi_n(x) + \psi_n(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} f(x) + g(x)\ \forall x \text{ и } \varphi_n + \psi_n \in SF^+\ \forall n. \qquad (6)$$

Също така, както следва от (5)

$\int \varphi_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ и $\int \psi_n \, d\mu \to \int g \, d\mu$ (7)

$\int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu \to \int (f+g) \, d\mu$.

Накрая от лин. на $\int$ в-ху $SF^+$ $\Rightarrow$

$\int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \int \varphi_n \, d\mu + \int \psi_n \, d\mu \quad \forall n.$ (8)

Сега от (7) и (8) получаваме, че

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu & = & \int \varphi_n \, d\mu & + & \int \psi_n \, d\mu \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow & & \\ \int (f+g) \, d\mu & & \int f \, d\mu & & \int g \, d\mu \end{array}}_{\Rightarrow (6)}$$

$\square$

Т-ма (адитивност на $\int$ в-ху $M^+$). Ако $E$ е изм. мн-во, $f \in M^+(X)$, то $\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{X \setminus E} f \, d\mu$

Д-во Както знаем, $\chi_E + \chi_{X\setminus E} = 1$

$$\Rightarrow f\chi_E + f\chi_{X\setminus E} = f \overset{\text{лин.}}{\Rightarrow} \int_X f \, d\mu = \int_X (\underbrace{f\chi_E}_{\in M^+} + \underbrace{f\chi_{X\setminus E}}_{\in M^+}) \, d\mu \overset{\text{лин.}}{=}$$

$$= \int_X f\chi_E \, d\mu + \int_X f\chi_{X\setminus E} \, d\mu := \int_E f \, d\mu + \int_{X\setminus E} f \, d\mu$$

Т-ма (монотонност) Ако $f, g \in M^+(X)$ и $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$, то $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Д-во Следва от деф. за интеграл, като вземем предвид, че sup по по-широко множество, е $\geq$.

($\varphi \in SF^+$ и $\varphi \leq f \Rightarrow \varphi \leq g$)

$\square$

Тв 6

Ако $f(x)=0$ п.н. в $X$ и $f \in M^+(X)$, то $\int f d\mu = 0$

Да припомним, че $f=0$ п.н. означава, че $\mu\{x \in X : f(x) \neq 0\} = 0$

Д-во $\forall \varphi \in SF^+ : \varphi \leq f$ в $X \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$. (9)

Нека $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$. От (9) $\Rightarrow a_i \neq 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0$

(защото, ако пол. $E = \{x : f(x) \neq 0\}$, то $\varphi(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in E$)

$\Rightarrow A_i \subseteq E\ \forall i : a_i \neq 0\ (a_i > 0) \Rightarrow a_i \mu(A_i) = 0\ \forall i \Rightarrow \int \varphi d\mu = 0\ \forall \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f d\mu = \sup\{\int \varphi d\mu : \varphi \leq f, \varphi \in SF^+\} = 0$

$\square$

Сл. 1 Ако $f, g \in M^+(X)$ и $f(x) \leq g(x)$ п.н. в $X$, то $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

Ще въведем интеграл върху още една съвкупност от функции.

Заб. Ако $E$ е неизмеримо, то $\int \chi_E d\mu$ не може да се определи като $\mu(E)$.

Нека $f \in M(X)$. Въвеждаме функциите

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, x \in X$ и $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Тогава $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$.

Също така, $f^+, f^- \in M^+(X)$.

Опр. Ако поне един от интегралите $\int f^+ d\mu$ и $\int f^- d\mu$ е краен, полагаме $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. Когато и двата интеграла са крайни, ще казваме, че $f$ е сумируема.
Съвкупността от сумируеми функции се означава чрез $L(X, \mu)$ или накратко $L(X)$.

Заб. Ако $f \in M^+$, то тогава $f = f^+$ и => горната деф. е съгласувана с деф. на интеграл от измерима неотр. функция. ($f^- = 0$)

Заб. Възможно е $\int f d\mu = +\infty$ и $\int f d\mu = -\infty$ (такива ф-ции не са сумируеми).

Дефинираните по-горе интеграли от функции в $M^+(X)$ или $L(X)$ се наричат интеграли на Лебег относно мярката $\mu$ върху $X$.

Заб. $f \in M^+$ принадлежи на $L$ <=> $\int f d\mu < \infty$.

Тв. 7 Имаме, че $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$. При това е в сила и неравенството $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$

Д-во: следва от деф.

(⇒) Според деф., ако $f \in L$, то $\int f^{\pm} d\mu < \infty$ (и $f^+$, и $f^-$ имат ~~интеграл~~ краен интеграл)

Сега като използваме лин. на инт. за неотр. измерими функции и факта, че $|f| \in M^+$, получаваме

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

Така показахме, че за неотр. изм. ф-ция $|f|$ има краен интеграл ⇒ тя е сумируема

(⇐) Нека $|f| \in L$. Тогава $\int |f| d\mu < \infty$ ($\int$ от $M^+$). Понеже

$$\int |f| d\mu = \underbrace{\int f^+ d\mu}_{\geq 0} + \underbrace{\int f^- d\mu}_{\geq 0} \Rightarrow \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu < \infty \Rightarrow f \in L.$$

Относно неравенството да заб, че

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \overset{\text{лин. за } M^+}{=}$$

$$= \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu$$

$\square$

T-ма (Линейност за $\int (L)$). Нека $f, g \in L(X)$ и $c \in \mathbb{R}$

(а) $f + g \in L$ и $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

(б) $cf \in L$ и $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

Д-во

(а) Ще сведем твърдението към неговия аналог за $M^+$

Имаме, че $f=f^+-f^-$ и $g=g^+-g^-$, като $\int f^\pm d\mu, \int g^\pm d\mu<\infty$

Полагаме $h=f+g$. Имаме още, че $h=h^+-h^-$.

Ясно е, че $h^\pm\in M^+$ (защото $h\in M$).

Първо ще док., че $h$ е сумируема. За тази цел да забл., че $|h|\in M^+$ и $|h|=|f+g|\le|f|+|g| \Rightarrow \int|h|d\mu \overset{\text{мон. за } \int M^+}{\le} \int|f|d\mu+\int|g|d\mu$.

Щом $f,g\in L \Rightarrow |f|,|g|\in L \Rightarrow \int|f|d\mu, \int|g|d\mu<\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int|h|d\mu<\infty \Rightarrow |h|\in L \Rightarrow h\in L$

За равенството разсъждаваме така:

$$h^+-h^-=h=f+g=(f^+-f^-)+(g^+-g^-) \Rightarrow$$

$$h^++f^-+g^-=f^++g^++h^- \quad \Big| \int M^+$$

$$\int(h^++f^-+g^-)d\mu=\int(f^++g^++h^-)d\mu$$

$$\int h^+d\mu+\int f^-d\mu+\int g^-d\mu=\int f^+d\mu+\int g^+d\mu+\int h^-d\mu$$

$$\int h^+d\mu-\int h^-d\mu=\left(\int f^+d\mu-\int f^-d\mu\right)+\left(\int g^+d\mu-\int g^-d\mu\right)$$

$$\int h\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu$$

(б) се доказва аналогично □

<u>Зад 2</u> (за изпит) Нека $f\in M^+(X)$ и $\lambda>0$. Док., че $\mu\{x\in X: f(x)\ge\lambda\}\le\frac{1}{\lambda}\int_X f\,d\mu$

С помощта на това неравенство докажете, че $f\in M^+(X)$ и $\int_X f\,d\mu=0$, то $f=0$ п.н.

Т-ма (монотонност) Ако $f, g \in L(X)$ и $f \leq g$ (п.н) в $X$, то

$\int f d\mu \leq \int g d\mu$

Д-во Имаме, че $g - f \geq 0$ (п.н.) $\Rightarrow g - f \in M^*$. От монотонността
ще док. само за навсякъде $f \leq g$
на $\int M^+ \Rightarrow \int (g-f) d\mu \geq 0$.

Сега от лин. на $\int$ в. ху $L \Rightarrow \int (g-f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu \Rightarrow$ тв. $\square$

Т-ма (адитивност) Ако $f \in L(X)$ и $E$ е измеримо ($E \subseteq X$), то

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{X \setminus E} f d\mu$$

Д-во $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$. Ви зад., че ако $f \in L \Rightarrow f \chi_E \in L$ $\square$

20.03.2018

## VI. Граничен преход под знака на лебеговия инт.

<u>Т-ма</u> (Бепо Леви / за монотонен граничен преход)
Нека $f_n \in M^+(X)$, $n = 1, 2, \dots$ и редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е $\uparrow \forall x$
Тогава $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in M^+(X)$

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$$

<u>Д-во</u> Както вече знаем, граница на измерими ф-ции също е измерима функция $\Rightarrow f \in M(X)$. Очевидно от $f_n(x) \geq 0 \ \forall n \forall x \Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x$. Така имаме, че $f \in M^+(X)$.

Първо да забележим, че от $f_n(x) \leq f(x) \ \forall n \forall x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n.$$

Следователно $\int_X f d\mu$ е горна граница на монот. растяща редица $\{\int_X f_n d\mu\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$.

Остава да докажем обратното неравенство, а именно

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Ще използваме деф. на $\int$ от $M^+$.

Нека $\alpha \in (0,1)$ и $\varphi \in SF^+(X)$ и $\varphi(x) \leq f(x)\ \forall x$. За така фикс. множества $\alpha$ и $\varphi$ разглеждаме мн-вата $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$.

1) Мн-вата $E_n$ са измерими, защото $f_n$ и $\alpha\varphi$ са измерими

2) $E_n \subseteq E_{n+1}$, защото $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$

3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. За да установим това, първо нека отбележим, че $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq X$, защото $E_n \subseteq X\ \forall n$.

Нека $x \in X$ е произволно фиксирано. Нека първо $f(x) > 0$. Тогава $\alpha\varphi(x)$ е строго по-малко от $f(x)$ и от $f_n(x) \to f(x)$ следва, че $\exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x) \Rightarrow x \in E_n$. Ако пък $f(x) = 0$, то от $\alpha\varphi(x) \leq f(x) = 0$, то $\varphi(x) = 0$. Установихме, че всяко $x \in X$ принадлежи на $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

По-нататък разсъждаваме по следния начин:

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_{E_n} f_n \, d\mu + \underbrace{\int_{X \setminus E_n} f_n \, d\mu}_{\geq 0} \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \alpha\varphi \, d\mu .$$

Така установихме, че $\int_X f_n \, d\mu \geq \alpha \int_X \varphi \chi_{E_n} \, d\mu \ \forall n$.

Пресмятаме $\int_X \varphi \chi_{E_n} \, d\mu$. Това е интеграл от проста функция.

Нека канон. форма на $\varphi(x)$ е $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)$.

Тогава $A_i$ са измерими, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = X$.
В такъв случай каноничната форма на неотр. проста функция $\varphi \chi_{E_n}$ е

$$\varphi \chi_{E_n} = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i} \chi_{E_n} = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap E_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_X \varphi \chi_{E_n} \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap E_n).$$

За фикс. $i \in \{1, \dots, m\}$ забелязваме, че фамилията от множества $\{A_i \cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ има свойството $A_i \cap E_1 \subseteq A_i \cap E_2 \subseteq \dots \subseteq A_i \cap E_n \subseteq \dots$. От основните св-ва на мярката знаем, че

$$\mu(A_i \cap E_n) \underset{n \to \infty}{\uparrow} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap E_n)}_{A_i \cap (\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{X}) = A_i}\Big)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i) \; \forall i.$$

Следователно

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \varphi \chi_{E_n} \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \lim_{n \to \infty} \mu(A_i \cap E_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \int_X \varphi \, d\mu.$$

Така, след граничен преход $n \to \infty$ в

$$\int_X f_n d\mu \geq \alpha \int_X \varphi \chi_{E_n} d\mu,$$

получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \int_X \varphi d\mu$ $\quad \forall \alpha \in (0,1)$
$\forall \varphi \in SF^+$ с $\varphi \leq f$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \sup_{\substack{\varphi \in SF^+ \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi d\mu = \alpha \int f d\mu. \quad \forall \alpha \in (0,1).$$

След граничен преход $\alpha \to 1-0$ в горното неравенство, достигнахме до

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

$\square$

Зад. В доказателството на теоремата използвахме адитивността на $\int$ от $M^+$ в

$$\int_X f_n d\mu = \int_{E_n} f_n d\mu + \int_{X \setminus E_n} f_n d\mu.$$

Но по-рано, ние установихме адитивността посредством линейността на $\int$, а нея доказахме чрез т-мата на Бепо Леви. Следователно за да бъде пълно д-вото на теоремата на БЛ, трябва да установим адитивността на $\int$ от $M^+$ по друг начин, без да използваме лин.

Но по-лесен е следният подход, той използва само монотонността на $\int$ от $M^+$:

Използваме, че $f_n \geq 0 \Rightarrow f_n \geq f_n \chi_{E_n}$ в $X \overset{\text{мон.}}{\Rightarrow}$

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f_n \chi_{E_n} \, d\mu = \int_{E_n} f_n \, d\mu$$

<u>Т-ма</u> (БЛ с п.н.) Нека $f_n \in M^+(X)$, $n = 1, 2, \dots$ (като всъщност предполагаме, че $f_n \in M(X)$ и $f_n(x) \geq$ п.н.) Нека още $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ п.н. $\forall n$. Тогава гран. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ съществува п.н. и

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

като за определеност можем да предполагаме, че $f(x) = 0$ за стойностите на $x$, за които $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

<u>Д-во</u> Ясно е, че $f \in M^+(X)$. Полагаме $X_n = \{x \in X : f_n(x) < 0\}$. Тогава $\mu(X_n) = 0$ $\forall n$. Също така пол. $Y_n = \{x \in X : f_n(x) > f_{n+1}(x)\}$ $\mu(Y_n) = 0$ $\forall n$. Полагаме $Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n\right)$. $Z$ е изброимо обединение на мн-ва с мярка $0 \Rightarrow \mu(Z) = 0$.

Разгл. $\tilde{f}_n(x) = f_n(x) \chi_{Z^c}(x)$.

Тогава $\tilde{f}_n(x) \in M(X)$, $\tilde{f}_n(x) \geq 0$ $\forall x$ $\forall n$ и $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расте $\forall x$.

Към тази редица прилагаме доказаната т-ма на БЛ. Получаваме, че

$\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \in M^+(X)$ $(\tilde{f}(x) \geq 0 \ \forall x)$ и $\int\limits_X \tilde{f} d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \tilde{f}_n d\mu$.

Остава да забележим, че $\tilde{f} = f$ п.н. и $\tilde{f}_n = f_n$ п.н., то

$\int\limits_X \tilde{f} d\mu = \int\limits_X f d\mu$ и $\int\limits_X \tilde{f}_n d\mu = \int\limits_X f_n d\mu \ \forall n$.

(по-лесно $\int\limits_X \tilde{f}_n d\mu = \int\limits_X f_n \chi_{\bar{Z}} d\mu = \int\limits_X f_n d\mu - \underbrace{\int\limits_X f_n \chi_Z d\mu}_{=0}$)

(може и $\int\limits_X \tilde{f}_n d\mu \leq \int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu$).

$\square$

<u>Т-ма</u> (Б.Л. за редове) Нека $f_n \in M^+(X)$. Тогава

$$\int\limits_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

<u>Лема</u> (Фату) Нека $f_n \in M^+(X)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогава

$$\int\limits_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

<u>Заб</u> Едно основно приложение на тази лема е в установяването на сумируемост за неогр. изм. ф-ии. Да предположим, че $f_n \in M^+(X)$ и $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \forall x$. Нека още $\int\limits_X f_n d\mu \leq C \in \mathbb{R} \ \forall n$.

Сега лемата на Фату влече, като ~~[illegible]~~ взелем предвид, че
$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$,

$$\int\limits_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \le C,$$

като при това $f \in M^+(X)$, защото е граница на такива. След като $\int\limits_X f\,d\mu < \infty$, то $f \in L(X)$.

<u>Д-во</u> (на лемата на Фату) Ще получим твърдението като следствие от т-мата на БЛ. Имаме, че

$$\liminf_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{i\ge n} f_i\right);\ \text{пол. } g_n = \inf_{i\ge n} f_i\,.$$

Щом $f_i \in M^+(X) \Rightarrow g_n \in M^+(X)$; $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща $\forall x$.
Прилагаме БЛ към $\{g_n(x)\}$. Получаваме, че

$$\int\limits_X g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n\,d\mu, \qquad (1)$$

където $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$.

По-нататък взимаме предвид, че $f_n = \inf\limits_{i\ge n} f_i \le f_j\ \forall j \ge n$.

От мон. на $\int \Rightarrow \int\limits_X g_n\,d\mu \le \int\limits_X f_j\,d\mu\ \forall j \ge n \Rightarrow \int\limits_X g_n\,d\mu \le \inf\limits_{i\ge n} \int\limits_X f_i\,d\mu$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{i\ge n} \int\limits_X f_i\,d\mu\right) = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu \qquad (2)$$

Т-ма (Лебег, за граница на огр. редици) Нека

(а) $f_n \in L(X)$, $n = 1, 2, \dots$

(б) $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall x \forall n$, $g \in L(X)$

(в) $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x$

Тогава $f \in L(X)$ и $\int\limits_X f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu$

Заб. т-мата остава в сила, ако в (б) и (в) поискаме свойствата да бъдат изпълнени почти навсякъде.

Д-во (на т-мата на Лебег)

От (б) $\Rightarrow |f(x)| = |\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)| \le g(x)$ $\forall x$ и след като $g \in L(X)$, а $f$ е измерима, от $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x$ (дори и п.н.) $\Rightarrow f \in L(X)$

Разглеждаме редицата $\{g + f_n\}_{n=1}^{\infty}$; имаме, че $g + f_n \in M^+(X)$ $\forall n$. Прилагаме лемата на Фату към тази редица. Получаваме, че

$$\int\limits_X (\underbrace{\liminf (g+f_n)}_{\overset{(в)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(g+f_n) = f+g}) d\mu \le \underbrace{\liminf \int\limits_X (g+f_n) \, d\mu}_{\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu}$$

$$\Rightarrow \int\limits_X (g+f) \, d\mu \le \overbrace{\int\limits_X g \, d\mu}^{\in \mathbb{R}} + \liminf \int\limits_X f_n \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int\limits_X f \, d\mu \le \liminf \int\limits_X f_n \, d\mu \qquad (3)$$

По-нататък забелязваме, че редицата $\{g - f_n\}$ удовлетворява същите свойства, за които доказахме (3) за $\{g + f_n\}$.
В такъв случай вече доказаното нер-во (3) с $-f_n$ на мястото на $f_n$ и $-f$ на мястото на $f$ ~~...~~ $(\lim(-f_n) = -f)$, ни дава

$$\int_X -f\,d\mu \le \liminf \left( \int_X -f_n\,d\mu \right) = -\limsup \int_X f_n\,d\mu \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \int f\,d\mu \ge \limsup \int f_n\,d\mu \qquad (4')$$

Комбинирайки (3) и (4'), получаваме

$$\limsup \int f_n\,d\mu \overset{(4')}{\le} \int f\,d\mu \overset{(3)}{\le} \liminf \int f_n\,d\mu \le \limsup \int f_n\,d\mu$$

$\Rightarrow$ навсякъде имаме '='

$$\limsup \int f_n\,d\mu = \liminf \int f_n\,d\mu \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu. \qquad \square$$

<u>Зад. 3</u> (за изпит) Нека $f \in M^+(X)$ и $t \ge 0$ $(t > 0)$.
Дефинираме величините

$$S_f(t) = \{x \in X : f(x) > t\} \quad \text{и} \quad \psi_f(t) = \mu(S_f(t)).$$

(<u>разпределение</u> на $f$).

Докажете, че

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^\infty \psi_f\,dm \left( = \int_0^\infty \psi_f(t)\,dt \right)$$

Упътване: Първо за $SF^+$, а след това за $M^+$ чрез БЛ.

Зад. (не за изпит) Док., че огран. ф-ция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по Риман $\Leftrightarrow$ $f(x)$ е непр. п.н. относно $m$.

## VII. Метод на Каратеодори за конструкция на мярка

Нека $X$ е мн-во. С $\mathcal{P}(X)$ ще означаваме совкупността от подмножества на $X$.

<u>Опр.</u> Изображение $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ наричаме <u>външна</u> <u>мярка</u> над $X$, ако:

(а) $\mu^*(\emptyset)=0$

(б) Монотонност: $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \mu^*(S_1) \leq \mu^*(S_2)$

(в) пълна полуадитивност: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$

<u>Опр.</u> (Каратеодори) Нека $\mu^*$ е външна мярка над $X$. Казваме, че множеството $S \subseteq X$ е <u>$\mu^*$-измеримо</u>, ако

$$\mu^*(Y)=\mu^*(Y\cap S)+\mu^*(Y\cap S^c) \quad \forall Y \subseteq X.$$

Совкупността от $\mu^*$-изм. подмножества на $X$ се означава чрез $\mathcal{M}(X,\mu^*)$.

<u>Зад.</u> Проверете, че $m^*$ (външната лебегова мярка) е външна мярка в смисъла на Каратеодори.

<u>Заб.</u> Имайки предвид пълната полуадитивност на $\mu^*$ получаваме, че

$$\mu^*(Y)=\mu^*((Y\cap S)\cup(Y\cap S^c)) \overset{(в)}{\leq} \mu^*(Y\cap S)+\mu^*(Y\cap S^c).$$

Така виждаме, че $S\subseteq X$ е $\mu^*$-измеримо, ако

$$\mu^*(Y\cap S)+\mu^*(Y\cap S^c)\leq \mu^*(Y), \ Y\subseteq X: \mu^*(Y)<\infty$$

<u>Т-ма</u> (Каратеодори) Ако $\mu^*$ е външна мярка над $X$, то $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ е $\sigma$-алгебра и рестрикцията на $\mu^*$ в-ху $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ е мярка

13.04.2018 Разглеждаме изображения

$\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$

$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \mu^*(S_1) \leq \mu^*(S_2)$

$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$

$\mu^*(\emptyset) = 0$

$S$ е $\mu^*$ измеримо, ако $\mu^*(Y \cap S) + \mu^*(Y \cap S^c) = \mu(Y)\ \forall Y \subseteq X$.

Достатъчно е да се докаже $\leq$ за $Y \subseteq X: \mu^*(Y) < \infty$, тоест

$$\mu^*(Y \cap S) + \mu^*(Y \cap S^c) \leq \mu^*(Y) < \infty \qquad (K)$$

<u>Д-во</u> (на т-мата на Каратеодори)

Полагаме $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mu^*)$. Ясно е, че $\emptyset \in \mathcal{M}$. Действително, имаме, че

$$\underbrace{\mu^*(Y \cap \emptyset)}_{=0} + \mu^*(Y \cap \emptyset^c) = \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X,$$

с което проверихме, че $\emptyset$ удовлетворява (K).

По-нататък, ако $S$ удовлетворява (K), тоест $S \in \mathcal{M}$, то като вземем предвид, че $(S^c)^c = S$, получаваме, че

$$\mu^*(Y \cap S^c) + \mu^*(Y \cap (S^c)^c) = \mu^*(Y \cap S^c) + \mu^*(Y \cap S) \leq \mu^*(Y).$$

Така установихме, че и $S^c \in \mathcal{M}$.

По-нататък ще докажем, че ако $A_1$ и $A_2 \in \mathcal{M}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. Оттук ще следва, че всяко обединение на краен брой елементи също $\in \mathcal{M}$. Нека $A_1$ и $A_2$ са такива, че

$$\mu^*(Y \cap A_i) + \mu^*(Y \cap A_i^c) = \mu^*(Y)\ \forall Y \subseteq X, i = 1, 2 \qquad (1)$$

Ще докажем, че $A_1 \cup A_2$ удовл. (K), откъдето $\Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$.

Представяме $A_1 \cup A_2$ като обединение на две непресичащи се множества:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c).$$

Имаме, че

$$Y \cap (A_1 \cup A_2) = Y \cap (A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2 \cap A_1^c) \text{ и}$$

$$Y \cap (A_1 \cup A_2)^c = Y \cap (A_1^c \cap A_2^c) = Y \cap A_1^c \cap A_2^c$$

Тогава за лявата страна на (K) относно $A_1 \cup A_2$ имаме, че

$$\mu^*(Y \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(Y \cap (A_1 \cup A_2)^c) \leq \mu^*(Y \cap A_1) + \mu^*(Y \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(Y \cap A_1^c \cap A_2^c).$$

Понеже $A_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow$ удовлетворява (1) $\forall Y \subseteq X$, то в частност за $Y \cap A_1^c$ вместо $Y$ в (1), получаваме, че

$$\mu^*((Y \cap A_1^c) \cap A_2) + \mu^*((Y \cap A_1^c) \cap A_2^c) = \mu^*(Y \cap A_1^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(Y \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(Y \cap (A_1 \cup A_2)^c) \leq \mu^*(Y \cap A_1) + \mu^*(Y \cap A_1^c) \overset{(1)}{=} \mu^*(Y).$$

Дотук доказахме, че $\mathcal{M}$ е алгебра. Ще докажем, че $\mathcal{M}$ е затворена дори относно изброими обединения на своите елементи. Нека $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$. Ще докажем, че $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Както знаем, можем да представим $A$ като обединение на изброимо много непресичащи се две по две множества, които се получават от $A_i$ чрез прилагане на $\cup$ и $X \setminus$ краен брой пъти и $\Rightarrow$ тези множества са подмножества в $\mathcal{M}$, защото $\mathcal{M}$ е алгебра.

И така, считаме, че $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Ще докажем, че $A$ удовлетворява (K), тоест

$$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \le \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X. \qquad (2)$$

Да забележим, че поради пълната адитивност на $\mu^*$ имаме, че $\mu^*(Y \cap A) = \mu^*\left(Y \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (Y \cap A_i)\right) \underset{\text{пълно полуад.}}{\le} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_i)$.

(2) ще следва от (3), където (3) е

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_i) + \mu^*(Y \cap A^c) \le \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X. \qquad (3)$$

За (3) е достатъчно да докажем

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(Y \cap A_i) + \mu^*(Y \cap A^c) \le \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X \qquad (4)$$

Полагаме $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Тогава $B_n \subseteq A \Rightarrow B_n^c \supseteq A^c \Rightarrow Y \cap B_n^c \supseteq Y \cap A^c$

$\Rightarrow \mu^*(Y \cap B_n^c) \ge \mu^*(Y \cap A^c)$.

Така, за да установим (4) е достатъчно да покажем, че сумата

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu^*(Y \cap A_i)}_{\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap A_i)\right) = \mu^*(Y \cap B_n)} + \mu^*(Y \cap B_n^c) \le \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X, \forall n \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

Така забелязваме, че ако докажем, че

$$\mu^*(Y\cap B_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(Y\cap A_i) \qquad \forall Y\subseteq X,\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad (6)$$

то (5) придобива вида

$$\mu^*(Y\cap B_n)+\mu^*(Y\cap B_n^c)\leq \mu^*(Y),$$

което е вярно, защото $B_n\in\mathcal{M}$ и $\Rightarrow$ удовл. (К). Така установихме, че за да докажем (2) е достатъчно да док. (6).

За да док. (6), разсъждаваме по следния начин. Щом $A_n\in\mathcal{M}$ (което удовл. (К)), то $\forall Y\subseteq X$ имаме

$$\mu^*(Y\cap B_n)=\mu^*(\underbrace{(Y\cap B_n)\cap A_n}_{Y\cap A_n,\ B_n\supseteq A_n})+\mu^*(\underbrace{(Y\cap B_n)\cap A_n^c}_{Y\cap B_{n-1},\ A_i\cap A_n=\emptyset,\ i=1,\dots,n-1})=$$

$$=\mu^*(Y\cap A_n)+\mu^*(Y\cap B_{n-1})=\mu^*(Y\cap A_n)+\mu^*(Y\cap A_{n-1})+\mu^*(Y\cap B_{n-2})=$$

$$=\mu^*(Y\cap A_n)+\mu^*(Y\cap A_{n-1})+\dots+\mu^*(Y\cap A_2)+\mu^*(Y\cap A_1)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu(Y\cap A_i),$$ с което (6), а $\Rightarrow$ и (2), са установени.

С това доказахме, че $\mathcal{M}$ е $\sigma$-алгебра.

Остава да докажем, че $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ притежава своятото пълна адитивност. Останалите характеристични свойства на мярката $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ наследява от $\mu^*$.

По-горе установихме (3), откъдето следва

$$\mu^*(Y)\leq\mu^*(Y\cap A)+\mu^*(Y\cap A^c)\overset{\text{пълна полуад.}}{\leq}\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(Y\cap A_i)+\mu^*(Y\cap A^c)\overset{(3)}{\leq}\mu^*(Y)\quad\forall Y\subseteq X$$

$\Rightarrow$ в частност, за $Y = A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\underset{i \neq j}{A_i \cap A_j = \emptyset}$, откъдето получаваме

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{A \cap A_i}_{A_i}) + \mu(\underbrace{A \cap A^c}_{\emptyset}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

$\square$

Опр. Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е алгебра. Казваме, че изображението $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ е предмярка, ако притежава свойствата

(а) $\mu_0(\emptyset) = 0$

(б) Условна пълна адитивност:

Ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, то $\mu_0\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$.
$A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

Заб. Ако $\mathcal{A}$ е $\sigma$-алгебра, а $\mu_0$ е предмярка върху $\mathcal{A}$, то $\mu_0$ е мярка. Затова от интерес са случаите, когато $\mathcal{A}$ е алгебра, но не $\sigma$-алгебра.

Пр. $\mathcal{A}$ се състои от всички крайни подинтервали на $[a, b]$ (или $\mathbb{R}$)

Опр. Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е алг. и $\mu_0$ е предмярка на $\mathcal{A}$. Деф. изобр. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ посредством равенството

$$\mu^*(S) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) : S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и } A_i \in \mathcal{A}\right\}.$$

То се нарича външна мярка, породена от предмярката $\mu_0$.

Заб. Непосредствено се проверява, че така деф. изобр. $\mu^*$ е действително външна мярка на $X$.

Зад.
Всяка предмярка е монотонна, тоест $S_1 \subseteq S_2$, $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \mu_0(S_1) \leq \mu_0(S_2)$

$\mu_0$ (предмярка) $\longmapsto$ $\mu^*$ (външна мярка) $\xmapsto{\text{Т-ма (К)}}$ $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ (мярка)

За добра съгласуваност на тази конструкция е важно

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ и $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

<u>Т-ма</u> (Каратеодори). Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е алгебра, $\mu_0$ е предмярка върху $\mathcal{A}$ и $\mu^*$ е породената от $\mu_0$ външна мярка.

Тогава

(а) $\mu^*(A) = \mu_0(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

(б) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(X, \mu^*)$, тоест множествата от $\mathcal{A}$ са $\mu^*$-измерими.

<u>Д-во</u>

(а) Равенството се разпада на две неравенства. Едното от тях е очевидно. Действително, щом $A \in \mathcal{A}$, то то покрива себе си $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu_0(A)$. Остава да установим обратното неравенство. Нека $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots$, като $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A$. От това покритие образуваме друго, в което мн-вата не се пресичат две по две и още тяхното обединение е самото множество $A$.

Последното множество ни гарантира, че новата фамилия от множества $\mathcal{A}$ остава покритие на $A$ и обединението на неговите елементи е в $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ е приложимо свойството на условна пълна адитивност на $\mu_0$.

Образуваме новото покритие по следния начин:

Полагаме $B_1 = A \cap A_1$

$$B_j = A \cap (A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i)), \ j \geq 2.$$

Да забележим, че $B_j \in \mathcal{A}$, $j=1,\dots$, защото $\mathcal{A}$ е алгебра и $B_j \cap B_i = \emptyset$, $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = A$, защото $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A$.

Благодарение на усл. пълна адитивност се установява

$$\mu_0(A) = \mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j). \qquad (7)$$

Освен това, $B_j \subseteq A \cap A_j \subseteq A_j \ \forall j \Rightarrow \mu_0(B_j) \leq \mu_0(A_j) \ \forall j$.

От $(7) \Rightarrow \forall$ покритие $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ на $A$ с елементи от $\mathcal{A}$ имаме, че $\mu_0(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A)$. $\Rightarrow \mu_0(A) \leq \mu^*(A)$.

(б) Ще докажем, че ако $A \in \mathcal{A}$, то $A$ удовлетворява (К), т.е.

$$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \mu^*(Y) \ \forall Y \subseteq X. \qquad (8)$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mu^*)$.

Нека $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ е покритие на $Y$. Тогава $Y \cap A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A =$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A). \overset{\text{монот.}}{\Rightarrow} \mu^*(Y \cap A) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A)) \underset{\text{полуад.}}{\overset{\text{пълна}}{\leq}} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu^*(A_i \cap A)}_{\mu_0(A_i \cap A) \text{ от (а)}}. \qquad (9)$$

( $A^c$ на мястото на $A$ в (8), получаваме

$$\mu^*(Y \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i \cap A^c).$$

Сега от (8) и (9) получаваме, че

$$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i \cap A^c) =$$

$= \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_0(A_i \cap A) + \mu_0(A_i \cap A^c)).$ (10)

Да забележим сега, че $A_i \cap A$ и $A_i \cap A^c$ са такива, че $(A_i \cap A) \cap (A_i \cap A^c) = \emptyset$ и обединението им $\underbrace{(A_i \cap A) \cup (A_i \cap A^c)}_{= A_i \in \mathcal{A}}$

$\Rightarrow$ свойството усл. пълна полуадитивност на $\mu_0$ е приложимо и $\mu_0(A_i \cap A) + \mu_0(A_i \cap A^c) = \mu_0(A_i)$ $\forall i$.

Като заместим в (10) получаваме

$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$ $\forall$ покритие $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ на $Y$, $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i$. Оттук и деф. на $\mu^*$ следва (8). □

<u>Т-ма</u> (за продължение на предмярка до мярка на Каратеодори)
Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е алгебра и $\mu_0$ е предмярка в-ху $\mathcal{A}$. Тогава $\mu_0$ може да се продължи до мярка в-ху $\sigma(\mathcal{A})$.

<u>Заб.</u> С $\sigma(\mathcal{A})$ се означава най-малката $\sigma$-алгебра, съдържаща $\mathcal{A}$. Тази $\sigma$-алгебра се нарича породена от $\mathcal{A}$

<u>Д-во</u> Нека $\mu^*$ е външна мярка, породена от $\mu_0$. Тогава $\mathcal{M}(X,\mu^*) \supseteq \mathcal{A}$, както знаем от предходната т-ма. От друга страна $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ е $\sigma$-алг. (от първата т-ма). Следователно $\mathcal{M}(X,\mu^*) \supseteq \sigma(\mathcal{A})$. Според първата т-ма $\mu^*|_{\mathcal{M}(X,\mu^*)}$ е мярка $\Rightarrow$ $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ също е мярка. Остава да отбележим, че благодарение на предходната т-ма имаме $\mu^*(A) = \mu_0(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$. Така $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ е продължение на $\mu_0$ □

<u>Заб.</u> Оказва се, че в общия случай продължението не е единствено.

20.04.2018

## VIII. Функции с ограничена вариация. Основни свойства. Интеграл на Лебег-Стилтес.

Опр. (Ограничена вариация) Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\tau$ е разбиване на $[a,b]$

$\tau: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Вариация на $f(x)$ относно $\tau$ наричаме ~~величината~~ величината

$$V_\tau=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

от пълна вариация на $f$ в-ху $[a,b]$ наричаме величината

$$\bigvee_a^b f=\sup_\tau V_\tau.$$

Ако $\bigvee_a^b f<\infty$, казваме, че $f(x)$ има ограничена вариация върху $[a,b]$.

Съвкупността от функции с ограничена вариация в-ху $[a,b]$ се означава чрез $BV[a,b]$.

Тв.1 Всяка функция с ограничена вариация е ограничена

Д-во Нека $x\in[a,b]$ е произволно. Разглеждаме разбиването $\tau: a<x<b$. Тогава

$$V_\tau=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le\bigvee_a^b f$$

$\Rightarrow |f(x)-f(a)|\le\bigvee_a^b f\Rightarrow |f(x)|\le|f(a)|+\bigvee_a^b f\quad\forall x\in[a,b]$.

$\Rightarrow f(x)$ е ограничена.

Заб. Не всяка ограничена функция има ограничена вариация. Дори не всяка непр. ф-ция е такава.

Тв.2 Всяка монотонна функция има ограничена вариация.

Д-во Нека $\tau: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ е произволно разбиване на $[a,b]$. Нека $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е $\uparrow$. Тогава

$$V_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{f(x_i) - f(x_{i-1})}_{\geq 0}| = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_1) - f(x_n) =$$

$= f(b) - f(a)$. Следва $f \in BV[a,b]$, при това $\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$.

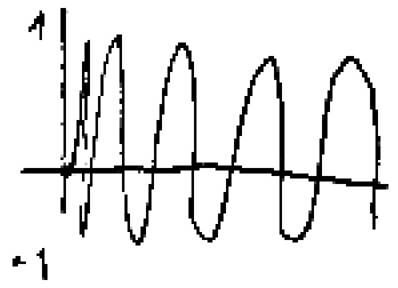
Ако $f$ е $\downarrow$, то $\bigvee_a^b f = f(a) - f(b)$.

$\square$

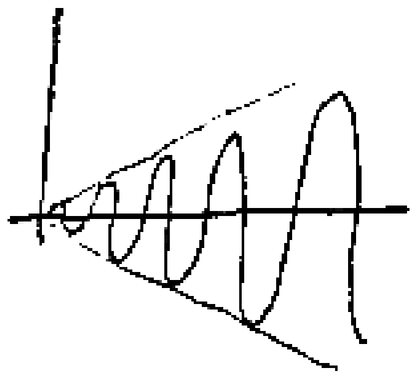
Заб. Аналогично се въвежда понятието ф-ция с ограничена вариация в (полу)безкраен интервал.

Пр.1

1) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \notin BV[0,1]$




2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \notin BV[0,1]$



3) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \in BV[0,1]$

Т-ма Ако $f, g \in BV[a,b]$, то

(а) $f+g \in BV[a,b]$

(б) $fg \in BV[a,b]$

$\Rightarrow$ $f-g \in BV[a,b]$, $-f \in BV[a,b]$

(в) Ако $g(x) \geq c > 0\ \forall x \in [a,b]$, то $\frac{f}{g} \in BV[a,b]$.

Д-во Непосредствено от деф. □

Т-ма (адитивност) Нека $c \in (a,b)$. Тогава $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ има ограничена вариация в-ху $[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ има ограничена вариация в-ху $[a,c]$ и $[c,b]$. Ако тези условия са изпълнени, имаме

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f.$$

Пол. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = 0$.

Д-во: Съвсем аналогично на адитивността на римановия интеграл. □

Т-ма (Жордан) Дадена функция има ограничена вариация $\Leftrightarrow$ може да се представи като разлика на две монотонно растящи функции.

Д-во ($\Leftarrow$) Нека $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ и $f = \varphi_1 - \varphi_2$, където $\varphi_1$ и $\varphi_2$ са $\uparrow$ в $[a,b]$. Както по-рано отбелязахме, $\varphi_1, \varphi_2 \in BV[a,b]$ и $\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in BV[a,b]$.

($\Rightarrow$) Полагаме $\varphi_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f$, $x \in [a,b]$

Предвид адитивността на вариацията, $\varphi_1(x)$ е добре дефинирана. Пак от тази теорема $\Rightarrow \varphi_1$ е $\uparrow$. Полагаме още $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$. Тогава $f = \varphi_1 - \varphi_2$.

Така остава да се убедим, че $\varphi_2$ е ~~[illegible]~~. Нека $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a,b]$. Имаме, че $\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1) =$

$$= (\varphi_1(x_2) - f(x_2)) - (\varphi_1(x_1) - f(x_1)) = \underbrace{\bigvee_a^{x_2} f - \bigvee_a^{x_1} f}_{= \bigvee_{x_1}^{x_2} f} - (f(x_2) - f(x_1)) =$$

$$= \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq \bigvee_{x_1}^{x_2} f - |f(x_2) - f(x_1)| \geq 0.$$

$$\left( |f(x_2) - f(x_1)| = V_{\{x_1, x_2\}} f \leq \bigvee_{x_1}^{x_2} f \right)$$

$\square$

Заб. Представянето на функция с ограничена вариация като разлика на две монотонни функции не е единствено. Действително, ако $f = \psi_1 - \psi_2$ е едно такова представяне, каквато и монотонно растяща функция $h$ да вземем, $f = (\psi_1 + h) - (\psi_2 + h)$ е друго представяне на $f$ като разлика на две монотонно растящи ф-ции.

Зад.1 Може ли всяко такова представяне да се получи от $\varphi_1$ и $\varphi_2$ от доказателството на горната теорема?

Забел. Още едно представяне е
$f(x) = \frac{1}{2}\left(\bigvee_a^x f + f(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\bigvee_a^x f - f(x)\right)$

Пр. 2 Диф. функция с неограничена вариация

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Мярка и интеграл на Лебег - Стилтес.

Нека $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ е монотонно растяща. Полагаме

$\varphi_-(x) = \lim\limits_{u \to x-0} \varphi(u)$, $x \in (a,b]$; $\varphi_-(a) = \varphi(a)$

$\varphi_+(x) = \lim\limits_{u \to x+0} \varphi(u)$, $x \in [a,b)$; $\varphi_+(b) = \varphi(b)$

функциите $\varphi_+$ и $\varphi_-$ са добре дефинирани, защото $\varphi(u)$ има лява и дясна граница в $(a,b)$, а това е така, защото $\varphi$ е монотонна.

По-нататък нека $\mathcal{A}$ е алгебрата, породена от крайните обединения на подинтервали на $[a,b]$. В-ху $\mathcal{A}$ дефинираме $\mu_0$, като полагаме за $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ с

$\mu_0([\alpha,\beta]) = \varphi_+(\beta) - \varphi_-(\alpha)$

$\mu_0([\alpha,\beta)) = \varphi_-(\beta) - \varphi_-(\alpha)$

$\mu_0((\alpha,\beta]) = \varphi_+(\beta) - \varphi_+(\alpha)$

$\mu_0((\alpha,\beta)) = \varphi_-(\beta) - \varphi_+(\alpha)$

Всеки елемент на $\mathcal{A}$ се представя (не по единствен начин) във вида $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, където $I_j$ са непресичащи се два по два интервала на $[a,b]$.

Полагаме $\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$. Трябва да се покаже, че горната деф. е коректна (т.е., че $A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j'$, $I_j' \cap I_k' = \varphi$ за $k \neq j$, $I_j' \subseteq [a,b]$), то

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(I_j'). \qquad (1)$$

Това следва от твърдението

Тв. $\mu_0$ е предмярка в-ху $\mathcal{A}$.

Д-во (схема)

От самата деф. за $\mu_0 \Rightarrow \mu_0(\emptyset) = 0$. Ще проверим, че $\mu_0$ притежава св-вото условна пълна адитивност:

Ако $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ и $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, $A_j$ не се пресичат две по две. $\Rightarrow \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

Да отбележим, че последното влече (1).

Първо забелязваме, че за да установим условната пълна адитивност е достатъчно да покажем, че ако $I := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell$, $I, I_\ell \subseteq [a,b]\ \forall \ell$ и $I_{\ell_1} \cap I_{\ell_2} = \emptyset$ за $\ell_1 \neq \ell_2$, то

$$\mu_0(I) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu_0(I_\ell). \qquad (2)$$

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_j} I_{j_i} = \bigcup_{k=1}^{m} J_k$

Сега (2) влече (1) и после условната пълна адитивност.

После, като се използва монотонността на $\varphi$ се установява, че

$$\sum_{l=1}^{n} \mu_0(I_l) \le \mu_0(I) \ \forall n$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \mu_0(I_l) \le \mu_0(I).$$

За обратното неравенство се разсъждава аналогично на доказателството, че $m^*(I_{\alpha,\beta}) = \beta-\alpha$, където $I$ е интервал с краища $\alpha<\beta$. (използва се съществено теоремата на Хайне-Борел и свойствата на $\varphi_+$ и $\varphi_-$, свързани с непрекъснатостта). продължение на темата Чрез метода на Каратеодори построяваме чрез $\mu_0$ външна мярка $\mu_\varphi^*$. $\mu_\varphi^*$ е мярка в-ху $\mathcal{M}([a,b],\mu_\varphi^*)$ (това се $\sigma$-алгебра). В частност, $\mu_\varphi^*$ е мярка в-ху $\sigma(\mathcal{E})$. Последното се нарича $\sigma$-алгебра на бореловите множества.

Да означим $\mu_\varphi$ рестрикцията на $\mu_\varphi^*$ в-ху $\mathcal{M}([a,b],\mu_\varphi^*)$ (или в-ху $\sigma(\mathcal{E})$). $\mu_\varphi$ се нарича <u>мярка на Лебег-Стилтес</u>, породена от $\varphi$. Тя води до интеграл, наречен интеграл на Лебег-Стилтес. Той се означава чрез $\int_a^b f\,d\mu_\varphi$ или $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$. Накрая, ако $\varphi \in BV[a,b]$ и $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, където $\varphi_1 = \bigvee_a^x$, то полагаме $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) := \int_a^b f\,d\varphi_1 - \int_a^b f\varphi_2$, стига интегралите да са крайни.

Този интеграл се нарича интеграл на Лебег-Стилтес относно функцията с ограничена вариация $\varphi$.

Зад. 4 (за изпит) Установете връзка между функциите с ограничена вариация върху краен затворен интервал и крайните Борелови мерки върху същия интервал.

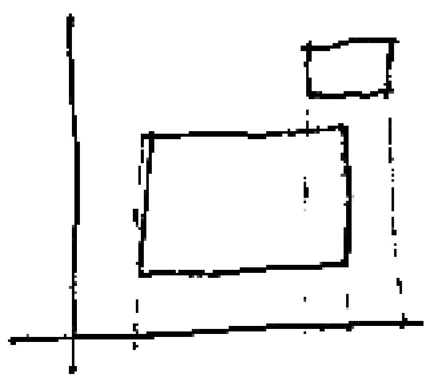
Опр. Мярката $\mu$ над $[a, b]$ се нарича крайна, ако $\mu([a,b]) < \infty$

Доб. Мярката се нарича Борелова, ако е дефинирана в-ху $\sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \{\bigcup_{k=1}^{n} I_k : n \in \mathbb{N}, I_k \subseteq [a,b]\}$

IX. Произведение на мерки. Теореми на Тонели и Фубини. Лебегов интеграл в крайномерно пространство.

Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ са две пространства с мярка. Декартовото произведение на $X$ и $Y$ ще бележим с $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$. Правоъгълник в $X \times Y$ наричаме всяко множество от вида $A \times B$, където $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$.

Въвеждаме алгебрата $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, състояща се от всички крайни обединения на непресичащи се два по два правоъгълници.



Полагаме $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$.

Ще въведем изображение $\pi_0$ в-ху $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, за което ще докажем, че е предмярка. Нея след това ще продължим до мярка в-ху $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Тази мярка се нарича произведение на $\mu$ и $\nu$ и се означава с $\mu \times \nu$.

27.04.2018 $\pi_0 : \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \to [0,+\infty]$ и $\pi_0(A\times B) = \mu(A).\nu(B)$ $\forall A\times B \in \mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}$

<u>Тв.1</u> $\pi_0$ е предмярка в-ху $\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}$.

<u>Д-во</u> Тривиално от самата деф. за $\pi_0 : \mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N} \to [0,+\infty]$ и $\pi_0(\emptyset)=0$. За да установим, че $\pi_0$ притежава свойството условна пълна адитивност, е достатъчно да покажем, че ако $A\times B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$, $A, A_i \in \mathcal{M}$ и $B, B_i \in \mathcal{N}$ $\forall i$, правоъгълниците $A_i\times B_i$ не се пресичат два по два, то

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\nu(B_i).$$

От последното следва още коректността на деф. на $\pi_0$.

Използваме, че $\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i\times B_i}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)$

Интегрираме това тъждество относно $\nu$ в-ху $Y$ и прилагаме т-мата на Бепо Леви. Получаваме, че за всяко фикс. $x\in X$

$$\int_Y \chi_A(x)\chi_B(y)\,d\nu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_Y \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)\,d\nu$$

$$\chi_A(x)\underbrace{\int_Y \chi_B(y)\,d\nu}_{\nu(B)} = \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i}(x)\underbrace{\int_Y \chi_{B_i}\,d\nu}_{\nu(B_i)}.$$

Така $\forall x\in X$ получаваме

$$\nu(B)\chi_A(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(B_i)\chi_{A_i}(x).$$

Интегрираме по $x$ в-ху $X$ относно $\mu$ и отново прилагаме т-мата на БЛ:

$$\nu(B)\int_X \chi_A\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(B_i)\int_X \chi_{A_i}\,d\mu$$

Чрез $\pi_0$ конструираме външна мярка в-ху $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ (изобщо в-ху $\mathcal{P}(X\times Y)$)

$$\pi^*(S) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0(S_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq S,\ S_i \in \mathcal{M}\times\mathcal{N} \right\}$$

$S \subseteq X\times Y$.

С други думи, ако $S \subseteq X\times Y$

$$\pi^*(S) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j\times B_j) \supseteq S,\ A_j \in \mathcal{M},\ B_j \in \mathcal{N}\ \forall j \right\}$$

От т-мата на Каратеодори $\Rightarrow$ $\pi = \pi^*|_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$ е мярка в-ху $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, при това $\pi(A\times B) = \pi_0(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ $\forall A\in\mathcal{M}, B\in\mathcal{N}$

$\pi$ се нарича произведение на $\mu$ и $\nu$ и се означава чрез $\mu\times\nu$.

$\square$

Ще изведем връзка между интегралите

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\times\nu \quad \text{и} \quad \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)d\mu$$

$$\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)d\nu$$

Междувременно трябва да се покаже съществуването на интегралите горе в дясно.

Понякога, за да се подчертае по коя променлива се интегрира, тя се означава в скоби след мярката в интеграла: $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\times\nu(x,y)$

Опр. Казваме, че пространството с мярка $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е крайно, ако $\mu(S) < \infty \; \forall S \in \mathcal{M}$. (или еквивалентно $\mu(X) < \infty$). В такъв случай още се казва, че мярката $\mu$ е крайна.

Опр. Казваме, че $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е $\sigma$-крайно, ако $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i \in \mathcal{M}$ и имат крайна мярка $\mu(X_i) < \infty$. В такъв случай още казваме, че мярката $\mu$ е $\sigma$-крайна.

Опр. Нека $X$ е мн-во. Казваме, че $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ е монотонен клас, ако

$$S_i \uparrow S \text{ и } S_i \in C \; \forall i \Rightarrow S \in C$$

и

$$S_i \downarrow S \text{ и } S_i \in C \; \forall i \Rightarrow S \in C$$

Тук $S_i \uparrow S$ означава, че $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \ldots$ и $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, а

$S_i \downarrow S$ означава, че $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_n \ldots$ и $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$.

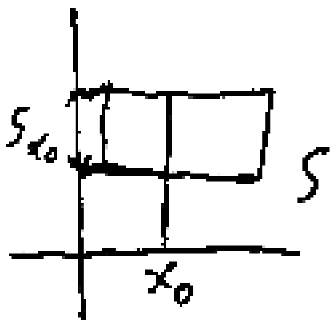
Опр. Нека $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Най-малкият монотонен клас, съдържащ $\mathcal{E}$, се нарича монотонен клас, породен от $\mathcal{E}$ и се означава чрез $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Заб. $\exists$ на такъв монотонен клас се доказва аналогично на $\exists$ на най-малката $\sigma$-алгебра, съдържаща $\mathcal{E}$.

Лема (за монотонния клас) Ако $\mathcal{A}$ е алгебра ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$), то $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Опр.

Нека $S \subseteq X \times Y$. За $x_0$ полагаме $S_{x_0} = \{y \in Y : (x_0, y) \in S\}$.
$S_{x_0}$ се нарича сечение. Аналогично
$S^{y_0} = \{x \in X : (x, y_0) \in S\}$.




Основни свойства

(а) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow (S_1)_x \subseteq (S_2)_x \ \forall x \in X$

(б) $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (S_i)_x$

(в) $(S^c)_x = (S_x)^c$

Нека $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$. За $x_0 \in X$ полагаме $f_{x_0}(y) := f(x_0, y)$, $y \in Y$
и $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$, $x \in X$.

Лема 1 Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ са пространства с мярка

(а) Ако $S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, то $S_x \in \mathcal{N}\ \forall x \in X$ и $S^y \in \mathcal{M}\ \forall y \in Y$

(б) Ако $f$ е измерима ($f \in M(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$), то $f_x \in M(Y, \mathcal{N})\ \forall x \in X$ и $f^y \in M(X, \mathcal{M})$.

Д-во (а) Разглеждаме множеството $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} : S_x \in \mathcal{N}\ \forall x$ и $S^y \in \mathcal{M}\ \forall y\}$. Ще покажем, че $\mathcal{F} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Ясно е, че е достатъчно да покажем, че $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$. А за това е достатъчно да покажем, че $\mathcal{F}$

е $\sigma$-алгебра, съдържаща $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$.

Първо ще докажем, че $\mathcal{F}$ съдържа правоъгълниците. И така, нека $A\in\mathcal{M}$ и $B\in\mathcal{N}$. Нека $x\in X$ е произволно фиксирано. Тогава

$$(A\times B)_x=\begin{cases} B, & x\in A\\ \emptyset, & x\notin A\end{cases} \Rightarrow \text{ и в двата случая, } (A\times B)_x\in\mathcal{N}.$$

Съвсем аналогично установяваме, че $(A\times B)^y\in\mathcal{M}\ \forall y$. Така доказваме, че правоъгълниците са в $\mathcal{F}$. Нека $S_1,\dots,S_n,\dots\in\mathcal{F}$. Ще докажем $\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j\in\mathcal{F}$. Имаме $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j\right)_x=\bigcup_{j=1}^{\infty}(S_j)_x$, но $(S_j)_x\in\mathcal{N}\ \forall j$, защото $S_j\in\mathcal{F}$.

$\mathcal{N}$ е $\sigma$-алгебра $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty}(S_j)_x\in\mathcal{N}$; аналогично се установява, че $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j\right)^y\in\mathcal{M}\ \forall y$.

Накрая, ако $S\in\mathcal{F}$, то $(S^c)_x=(S_x)^c$, но $S\in\mathcal{F}\Rightarrow S_x\in\mathcal{N}$; а $\mathcal{N}$ е $\sigma$-алгебра $\Rightarrow (S_x)^c\in\mathcal{N}$. Аналогично се установява, че $(S^c)^y\in\mathcal{M}\ \forall y$. Следователно $S^c\in\mathcal{F}$.

Така установихме, че $\mathcal{F}$ е $\sigma$-алгебра, съдържаща $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ (това доказателството на (а) е завършено.

(б) следва непосредствено от (а). Действително, за $c\in\mathbb{R}$ и $x\in X$ имаме

$\{y\in Y: f(y)>c\}\in\mathcal{N}$ (според деф. за измеримост относно $\sigma$-алгебрата $\mathcal{N}$), тоест $(f_x)^{-1}((c,+\infty])\in\mathcal{N}$.

Използваме, че $(f_x)^{-1}((c,+\infty])=(\underbrace{f^{-1}((c,+\infty])}_{\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}})_x\in\mathcal{M}$

Аналогично се установява и измеримостта на $f_y$. $\square$

Тв.2 Нека $(X,\mathcal{M},\mu)$ и $(Y,\mathcal{N},\nu)$ са $\sigma$-крайни пространства с мярка. Нека $S\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Тогава функциите

$$\varphi(x)=\nu(S_x),\ x\in X \quad \text{и} \quad \psi(y)=\mu(S_y);\ y\in X$$

са добре дефинирани, $\varphi$ е неотрицателна измерима ф-ция ($\varphi\in\mathcal{M}^+(X,\mathcal{M})$), а $\psi\in\mathcal{M}^+(Y,\mathcal{N})$). и $(\mu\times\nu)(S)=\int_X\varphi\,d\mu=\int_Y\psi\,d\nu$.

Заб. Последното твърдение може да се запише и така:

$$\int_{X\times Y}\chi_S\,d\mu\times\nu=\int_X\Big(\underbrace{\int_Y\chi_S(x,y)\,d\nu}_{\varphi}\Big)d\mu=\int_Y\Big(\underbrace{\int_X\chi_S(x,y)\,d\mu}_{\psi}\Big)d\nu.$$

Д-во (на тв.2) Достатъчно е да докажем твърдението за крайни пространства с мярка. Оттук то следва за $\sigma$-крайни посредством решението на зад.1 от зад. за изпита.

Разглеждаме множеството $C=\{S\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}: \text{тв.2 е вярно за } S\}$. Ще докажем, че $C\equiv\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Достатъчно е да покажем, че $\sigma$-алгебрата $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\subseteq C$. От друга страна, $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ е $\sigma$-алгебрата, породена от $\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}$ и, благодарение на лемата за монотонния клас, $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}=\sigma(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N})=\mathcal{M}(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N})$. Следователно е достатъчно да докажем, че $C$ е монотонен клас, съдържащ $\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}$.

Първо ще докажем, че всеки правоъгълник е в $C$.
Нека $A\in\mathcal{M}$ и $B\in\mathcal{N}$. Както вече отбелязахме,

$(A\times B)_x = \begin{cases} B, & x\in A \\ \emptyset, & x\notin A\end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \nu((A\times B)_x) = \begin{cases}\nu(B), & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = \nu(B)\chi_A(x) \Rightarrow \varphi(x)\in M^+(X,\mathcal{M})$. Аналогично се док., че $\psi(y)\in M^+(Y,\mathcal{N})$.

Имаме, че $\int_X \varphi d\mu = \int_X \nu(B)\chi_A d\mu = \nu(B)\int_X \chi_A d\mu = \nu(B)\mu(A) =$
$= (\mu\times\nu)(A\times B)$. Аналогично за $\psi$.

И така, всеки правоъгълник принадлежи на $\mathcal{C}$.

След това, като се използва адитивността на мярката и на $\int$, се установява, че всяко обединение на краен брой непресичащи се два по два правоъгълника също $\in \mathcal{C}$.

И така имаме, че $\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}\subseteq\mathcal{C}$. Ще докажем, че $\mathcal{C}$ е мон. клас.

Първо, нека $S_i\uparrow S$, като $S_j\in\mathcal{C}\ \forall j$. Ще покажем, че $S\in\mathcal{C}$.

Полагаме $\varphi_j(x) = \nu((S_j)_x)$, $\varphi(x)=\nu(S_x)$. От основните свойства на сечението имаме, че $(S_j)_x\uparrow S_x\ \forall x\in X \Rightarrow \varphi_j(x)\uparrow\varphi(x)\ \forall x\in X$.

Щом $S_j\in\mathcal{C}$, то $\varphi_j\in M^+(X,\mathcal{M})$ и $\Rightarrow \varphi\in M^+(X,\mathcal{M})$.

Прилагаме т-мата на БЛ към $\{\varphi_j\}$. Получаваме, че

$$\underbrace{(\mu\times\nu)(S_j)}_{\downarrow j\to\infty} = \int_X \varphi_j d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_X\varphi d\mu$$

$(\mu\times\nu)(S)$. Така установихме, че $(\mu\times\nu)(S) = \int_X \varphi d\mu$. Аналогично се установява, че $(\mu\times\nu)(S) = \int_Y \varphi d\mu$.

Накрая, нека $S_j \downarrow S$, $S_j \in C\ \forall j$. Ще докажем, че $S \in C$.

Аналогично на по-горе имаме, че $\varphi_j(x) \downarrow \varphi(x)\ \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in M^+(X,\mathcal{M})$ $\nu((S_1)_x) < \infty$

Към $\{\varphi_j\}$ ще приложим т-мата на Лебег за граничен преход в $\int$. За $\{\varphi_j\}$ имаме, че $0 \le \varphi_j(x) = \nu((S_j)_x) \le \nu((X \times Y)_x) = \nu(Y) < \infty$. $\forall j$.

Така показахме, че $\varphi_j(x) \le const\ \forall j\ \forall x$. Тъй като $\mu(X) < \infty$, то $1 \in L(X,\mu)$.
$\Rightarrow \varphi_j(x)$ се мажорират от сумируема ф-ция. $\Rightarrow$ т-мата на Лебег е приложима и

$$\underbrace{(\mu\times\nu)(S_j)}_{\downarrow j\to\infty\ (\mu\times\nu)(S)} = \int_X \varphi_j \, d\mu \xrightarrow{j} \int_X \varphi \, d\mu$$

$$; (\mu\times\nu)(S_1) \le (\mu\times\nu)(X\times Y) = \mu(X)\,\nu(Y) < \infty$$

Така установихме, че $S \in C$.

<u>Т-ма</u> (Тонели) Нека $(X,\mathcal{M},\mu)$ и $(Y,\mathcal{N},\nu)$ са $\sigma$-крайни пространства с мярка. Нека $f \in M^+(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$. Тогава ф-циите

$$g(x) = \int_Y f_x \, d\nu, \ x \in X \quad \text{и} \quad h(y) = \int_X f^y \, d\mu, \ y \in Y$$

са добре дефинирани и

$$g \in M^+(X,\mathcal{M}),\ h \in M^+(Y,\mathcal{N}) \ \text{и}$$

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_X g \, d\mu = \int_Y h \, d\nu.$$

<u>Забв.</u> Равенството между интегралите може още да се запише така

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu\Big)\,d\mu = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\,d\mu\Big)\,d\nu \qquad (*)$$

<u>Д-во</u> От лема 1 и от това, че $f \in M^+(X\times Y, M\otimes N) \Rightarrow g(x)$ и $h(y)$ са добре дефинирани(по-точно следва, че $f_x \in M^+(Y,N)\ \forall x\in X$ и $f_y \in M^+(X, M)\ \forall y \in Y$).

Както знаем, щом $f\in M^+(X\times Y, M\otimes N)$, $\exists \{f_j\} \subseteq M^+(X\times Y, M\otimes N)$ $f_j(x,y) \uparrow f(x,y)\ \forall (x,y)\in X\times Y$. и $f_j \in SF^+(X\times Y)$.

Поради линейността на интеграла от тв. 2 ⇒, че то е в сила за всяка проста ф-ция (простата ф-ция е крайна линейна комбинация на характеристични ф-ции).

И така, тв. 2 е в сила за $f_j(x,y)$, т.е. ако положим $g_j(x) = \int_Y (f_j)_x\,d\nu$, то $g_j \in M^+(X,M)$ и $\int_X g_j\,d\mu = \int_{X\times Y} f_j\,d(\mu\times\nu)\ \forall j$. (1)

Щом $f_j(x,y)\uparrow f(x,y)\ \forall (x,y)$, то

$$(f_j)_x(y) \uparrow_j f_x(y)\ \forall y\in Y\ \forall x\in X$$

$$\overset{\text{БЛ}}{\Rightarrow} g_j(x) \uparrow_j g(x)\ \forall x\in X \overset{\text{БЛ}}{\Rightarrow} \int_X g_j\,d\mu \longrightarrow \int_X g\,d\mu \qquad (2)$$

$$f_j(x,y)\uparrow f(x,y) \text{ влече } \int_{X\times Y} f_j\,d(\mu\times\nu) \longrightarrow \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) \qquad (3)$$

Сега от (1), (2) и (3) следва (*) относно $g$. Аналогично се доказва (*) за $h$

04.05.2018

<u>Т-ма</u> (Фубини) Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ са $\sigma$-крайни пространства с мярка. Нека $f \in L(X\times Y, \mu\times\nu)$. Тогава

(а) $f_x \in L(Y,\nu)$ п.н. относно $\mu$ в $X$

$f^y \in L(X,\mu)$ п.н. относно $\nu$ в $Y$

(б) функциите $g(x) = \int_Y f_x \, d\mu$ и $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ са добре дефинирани п.н. относно $\mu$ в $X$ и $\nu$ в $Y$

(в) $g \in L(X,\mu)$ и $h \in L(Y,\nu)$

(г) В сила е формулата (*)

<u>Д-во</u> Представяме $f(x,y)$ във вида $f = f^+ - f^-$. Тогава $f^\pm \in M^+(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$. Щом $f \in L(X\times Y, \mu\times\nu)$, то $0 \le \int_{X\times Y} f^\pm \, d\mu\times\nu < \infty$. Ще приложим т-мата на Тонели към $f^+(x,y)$ и $f^-(x,y)$. За тази цел въвеждаме функциите $g^\oplus(x) = \int_Y f_x^+ \, d\nu$ и $g^\ominus(x) = \int_Y f_x^- \, d\nu$. Т-мата на Тонели влече, че $g^\oplus \in M^+(X,\mathcal{M})$ и $\int_X g^\oplus \, d\mu = \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\times\nu) < \infty$.

Следователно $g^\oplus \in L(X,\mu)$ и това, че $g^\oplus(x)$ е крайна п.н.

Освен това, от деф. на $g^\oplus$ следва, че. Следователно, за почти всяко $x$ $\int_Y f_x^+ \, d\nu < \infty \Rightarrow f_x^\pm \in L(Y,\nu)$ относно $\mu$ в $X$. С това (а) е доказано

(б) Следва непосредствено от (а)

Относно (в), показваме, че $g(x) = g^{\oplus}(x) - g^{\ominus}(x)$ и $g^{\oplus} \in L(X,\mu)$
$\Rightarrow g \in L(X,\mu)$.

Накрая, ф-лата (*) следва като извадим равенствата

$$\int_{X\times Y} f^{+} d(\mu\times\nu) = \int_X g^{\oplus} d\mu \quad \text{и} \quad \int_{X\times Y} f^{-} d(\mu\times\nu) = \int_X g^{\ominus} d\mu.$$

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f^{+} d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^{-} d(\mu\times\nu) = \int_X g^{\oplus} d\mu - \int_X g^{\ominus} d\mu =$$

$$= \int_X (g^{\oplus} - g^{\ominus})\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

$\square$

<u>Сл.1</u> Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ са $\sigma$-крайни пространства с мярка. Нека $f \in M(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$. Ако

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu\right) d\mu < \infty \quad \text{или} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu\right) d\nu < \infty, \text{ то}$$

$f \in L(X\times Y, \mu\times\nu)$ и е в сила заключението на т-мата на Фубини

<u>Д-во</u> Прилагаме т-мата на Тонели към $|f| \in M^{+}(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$

Тогава получаваме, че $\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y |f|\, d\nu\right) d\mu < \infty$.

$\Rightarrow f \in L(X\times Y, \mu\times\nu)$ и т-мата на Фубини е приложима. $\square$

Заб. В общия случай $\mu\times\nu$ не е пълна върху $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Можем да я попълним до $\overline{\mu\times\nu}$ в-ху $\sigma$-алгебрата $\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$. Т-мите на Тонели и Фубини остават в сила за попълнените мярка и $\sigma$-алгебра.

## Мярка на Лебег в $\mathbb{R}^n$

Нека за краткост $n=2$. Ако с $m$ означим лебеговата мярка в-ху $\mathbb{R}$ и с $\mathcal{L}$ $\sigma$-алгебрата от измерими по Лебег подмножества на $\mathbb{R}$, то лебеговата мярка в-ху $\mathbb{R}^2$ се дефинира като попълнението на $m\times m$ в-ху $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$. Вместо $\overline{m\times m}$ обикновено продължаваме да пишем $m\times m$.

## X. Знакопроменлива мярка. Теореми за декомпозиция на Хан и Жордан.

Опр. Нека $(X,\mathcal{M})$ е измеримо пространство. Изображение $\nu:\mathcal{M}\to[-\infty,\infty]$, удовлетворяващо свойствата:

(а) $\nu(\emptyset)=0$

(б) $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(S_i)$ ако $S_1,S_2,\ldots\in\mathcal{M}$ не се пресичат две по две (пълна адитивност).

се нарича <u>знакопроменлива мярка</u> в-ху $(X,\mathcal{M})$

Заб. Подразбира се, че $\nu$ трябва да е такова, че дясната страна на равенството (б) винаги има смисъл. При това тя не променя стойността си при промяна на реда на членовете на реда.

Това в частност означава, че ако редът е сходящ (т.е. редицата от частични суми клони към реално число), то той е абсолютно сходящ.

Също така, (б) влече, че $\nu$ може да приеме само една от двете стойности $+\infty$ или $-\infty$.

Понякога, за по-голяма яснота, изображенията, притежаващи свойствата на мярка в обичайния смисъл, се наричат положителни мерки. Въобще знакопроменливите не са монотонни, нито притежават свойствата пълна полуадитивност.

Но две основни свойства, които се запазват при знакопроменливите мерки, са следните:

(а) Ако $S_1, S_2, \ldots \uparrow \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ $(S_1 \subseteq S_2 \ldots)$, то $\lim_{j\to\infty} \nu(S_j) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j)$

(б) Ако $S_1, S_2, \ldots \downarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j$ $(S_1 \supseteq S_2 \ldots)$ и $|\nu(S_1)| < \infty$, то $\lim_{j\to\infty} \nu(S_j) = \nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j)$

<u>Опр.</u> Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху измеримото пространство $(X, \mathcal{M})$

(а) Казваме, че $\nu$ е <u>P-положителна</u>, където $P \in \mathcal{M}$, ако $\nu(E) \geq 0$ $\forall E \in \mathcal{M} : E \subseteq P$.

(б) Казваме, че $\nu$ е <u>N-отрицателна</u>, където $N \in \mathcal{M}$, ако $\nu(E) \leq 0$ $\forall E \in \mathcal{M} : E \subseteq N$

(в) Казваме, че $\nu$ е нулева в-ху $F \in \mathcal{M}$, ако $\nu(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{M}$, $E \subseteq F$

<u>Зоб.</u> Ако $P \in \mathcal{M}$ и $\nu$ е $P$-положителна, то в-ху измеримите подмножества на $P$ $\nu$ притежава обичайните свойства

на положителните мерки, в частност $\nu$ е монотонна и пълно полуадитивна

Тв. Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху $(X, \mathcal{M})$. Ако $\nu$ е $P_j$-положителна, $j = 1, 2, \dots$ и $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, то $\nu$ е $P$-положителна

Д-во Ще се възползваме от пълната адитивност на $\nu$.

За тази цел, представяме $P$ като обединение на изброимо много подмножества на $P_j$, $j = 1, 2, \dots$, които не се пресичат две по две.

Полагаме $Q_1 = P_1$, $Q_j = P_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)$, $j \geq 2$. Тогава $Q_j \in \mathcal{M}\ \forall j$, $Q_j \subseteq P_j\ \forall j$, $Q_j$ не се пресичат две по две; $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j = P$.

Нека $E \in \mathcal{M}$ и $E \subseteq P$. Ще докажем, че $\nu(E) \geq 0$

Това ще означава, че $\nu$ е $P$-положителна. Имаме, че $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap Q_j)$, множествата $E \cap Q_j \in \mathcal{M}\ \forall j$ и не се пресичат две по две. Сега от пълната адитивност на $\nu \Rightarrow \nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_j)$

Но $E \cap Q_j$ е измеримо подмножество на $P_j$. Тогава, след като $\nu$ е $P_j$-положителна, получаваме, че $\nu(E \cap Q_j) \geq 0\ \forall j$.

Следователно $\nu(E) \geq 0$

$\square$

Т-ма (Хан, за декомпозиция)

Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху измеримото ~~пр~~множество $(X, \mathcal{M})$. Тогава $\exists P, N \in \mathcal{M}: X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$ и $\nu$ е $P$-пол. и $N$-отр.

Заб. Представянето на $X$ по посочения начин се нарича декомпозиция на Хан на $X$ относно знакопроменливата мярка $\nu$.

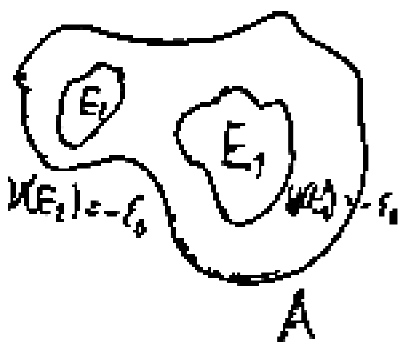
<u>Лема 1</u> Нека $\nu$ не приема $+\infty$. Ако $\nu(A) > -\infty$, то $\exists\, P \in \mathcal{M}$: $P \subseteq A$, $\nu(P) \geq \nu(A)$ и $\nu$ е $P$-положителна.

<u>Лема 2</u> Нека $\nu$ не приема $+\infty$. Ако $\nu(A) > -\infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{M}$: $B \subseteq A$, $\nu(B) \geq \nu(A)$ и $\nu(E) \geq -\varepsilon\ \forall E \in \mathcal{M}, E \subseteq B$.

<u>Д-во</u> (на лема 2)

Допускаме противното. Тогава $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ такова, че

каквото и $B \in \mathcal{M}$ да вземем такова, че $B \subseteq A$ и $\nu(B) \geq \nu(A)$, то $\exists\ E \in \mathcal{M}, E \subseteq B$ такова, че $\nu(E) < -\varepsilon_0$ $\Big\}(*)$




От $(*)$ с $B = A$ следва, че $\exists E_1 \in \mathcal{M}$: $E_1 \subseteq A$ и $\nu(E_1) < -\varepsilon_0$. Тогава имаме, че $\nu(A \setminus E_1) = \nu(A) - \nu(E_1) \geq \nu(A) + \varepsilon_0 \geq \nu(A)$. Прилагаме $(*)$ за $B = A \setminus E_1$. Получаваме, че $\exists E_2 \in \mathcal{M}: E_2 \subseteq A \setminus E_1$ и $\nu(E_2) < -\varepsilon_0$. Тогава $\nu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) = \nu(A) - \nu(E_1) - \nu(E_2) \geq \nu(A) + 2\varepsilon_0 \geq \nu(A)$. Продължавайки така, образуваме редица от измерими, взаимно непресичащи се множества $E_1, \dots, E_n, \dots$ такива, че $\nu(E_j) < -\varepsilon_0\ \forall j$. Сега разглеждаме редицата от множества

$A_0 = A$
$A_1 = A \setminus E_1$
$\vdots$
$A_j = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j} E_i\right)$

За нея имаме, че $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $|\nu(A_0)| = |\nu(A)| < \infty$ и $\nu(A_j) \geq \nu(A) + j\varepsilon_0$ $\forall j$

Но тогава от една страна $\lim \nu(A_j) = \nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$, а от друга се вижда, че $\nu(A_j) \geq \underbrace{\nu(A)}_{\in \mathbb{R}} + j\underbrace{\varepsilon_0}_{>0} \xrightarrow[j \to \infty]{} +\infty$. Така получихме, че съществува измеримо множество, а именно $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ такова, че $\nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = +\infty$ - прот. $\square$

**Д-во** (на лема 1). С помощта на лема 2 построяваме индуктивно следната редица от измерими множества:

Полагаме $A_1 = A$. По-нататък, прилагаме лема 2 с $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получаваме, че $\exists A_2 \in \mathcal{M} : A_2 \subseteq A_1 (= A)$ и $\nu(A_2) \geq \nu(A_1)$ и $\nu(E) \geq -\frac{1}{2}$ $\forall E \in \mathcal{M}$ с $E \subseteq A_2$. Изобщо, ако вече сме образували $A_{n-1}$, прилагаме лема 2 с $A = A_{n-1}$ и $\varepsilon = \frac{1}{n}$, установяваме, че $\exists A_n \in \mathcal{M} : A_n \subseteq A_{n-1}$, $\nu(A_n) \geq \nu(A_{n-1})$ и $\nu(E) \geq -\frac{1}{n}$ $\forall E \in \mathcal{M}$ с $E \subseteq A_n$. Полагаме $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Ясно е, че $P \in \mathcal{M}$ и $P \subseteq A$. Остава да проверим, че $\nu(P) \geq \nu(A)$ и $\nu$ е $P$-положителна. Неравенството следва от $\{\nu(A_k)\} \uparrow \Rightarrow$ $\nu(A_n) \geq \nu(A_1) = \nu(A)$; още понеже $|\nu(A_1)| = |\nu(A)| < \infty$ и $A_n \downarrow P$

$$\Rightarrow \lim \nu(A_n) = \nu(P)$$

$$\overset{\shortparallel}{\nu}(A) \Rightarrow \nu(P) \geq \nu(A).$$

Накрая, нека $E \in \mathcal{M}$ и $E \subseteq P$. Ще докажем, че $\nu(E) \geq 0$. Щом $E \subseteq P = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то $E \subseteq A_n$ $\forall n \Rightarrow \nu(E) \geq -\frac{1}{n}$ $\forall n \Rightarrow \nu(E) \geq 0$. $\square$

**Д-во** (т-ма на Хан) Да положим $S = \sup\{\nu(S) : S \in \mathcal{M}\}$. Щом $\nu(\varnothing) = 0$, то $S \geq 0$, затова $S \neq -\infty$. Нека $\nu$ не приема $+\infty$. Тогава $\exists \{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$, $\nu(S_j) \uparrow S$ и освен това $\nu(S_j) > -\infty$. Прилагаме лема 1 към $S_j$. Тя влече, че $\exists P_j \in \mathcal{M} : P_j \subseteq S_j$, $\nu(P_j) \geq \nu(S_j)$ и $\nu$ е $P_j$-положителна. Да забележим, че $\nu(S_j) \leq \nu(P_j) \leq S$ $\forall j$ и $\lim \nu(S_j) = S$, то $\lim \nu(P_j) = S$. Полагаме $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$. Тогава $\nu$ е $P$-положителна и освен това $\nu(P) = S$. Относно последното, то следва от $P_j \subseteq P \Rightarrow \nu(P_j) \leq \nu(P)$, защото $\nu$ е $P$-положителна. Следователно

$\nu(P_j) \leq \nu(P) \leq s \Rightarrow \nu(P) = s$.
$\downarrow$
$s$

От последното следва, че $s \neq \infty \Rightarrow s \in \mathbb{R}$. Полагаме $N = X \setminus P$. Тогава е ясно, че $X = P \cup N$ и $P \cap N = \emptyset$. Ще докажем, че $\nu$ е $N$-отрицателно. Да допуснем противното. Тогава

$$\exists S \in \mathcal{M} : S \subseteq N \text{ и } \nu(S) > 0 \Rightarrow \nu(P \cup S) \overset{P \cap S = \emptyset}{=} \nu(P) + \nu(S) = \underset{\mathbb{R}}{s} + \underset{0}{\nu(S)}.$$

Това е противоречие с деф. на $s$. Ако $\nu$ не приема стойност $-\infty$, прилагаме изведения резултат към $-\nu$, която не приема $+\infty$.

$\square$

11.05.2018

**Тв.** Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху измеримото пространство $(X, \mathcal{M})$. Ако $X = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ са две декомпозиции на Хан за $(X, \mathcal{M})$ относно $\nu$, то $\nu$ е нулева върху $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2 = (P_1 \cap N_2) \cup (P_2 \cap N_1)$

**Д-во** Нека $E \in \mathcal{M}$ и $E \subseteq (P_1 \cap N_2) \cup (P_2 \cap N_1)$. Трябва да докажем, че $\nu(E) = 0$. Представяме $E$ като обединение на две непресичащи се множества:

$$E = \underbrace{(E \cap P_1 \cap N_2)}_{E_1} \cup \underbrace{(E \cap P_2 \cap N_1)}_{E_2}$$

Ясно е, че $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, а от $P_1 \cap N_1 = \emptyset \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \emptyset$. След като $E_1 \subseteq P_1$, $E_1 \in \mathcal{M}$ и $\nu$ е $P_1$-положителна $\Rightarrow \nu(E_1) \geq 0$. Аналогично след като $E_1 \subseteq N_2$, $E_1 \in \mathcal{M}$ и $\nu$ е $N_2$-отрицателна, то $\nu(E_1) \leq 0$ $\Rightarrow \nu(E_1) = 0$. Оттук, разменяйки ролите на $P$ и $N$, получаваме $\nu(E_2) = 0$.

$\nu$ е пълно адитивна $\Rightarrow \nu(E) = \nu(E_1) + \nu(E_2) = 0$.

**Т-ма** (Жордан, за декомпозицията) Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху измеримото пространство $(X, \mathcal{M})$. Тогава $\exists$ положителни мерки $\nu_+$ и $\nu_-$ в-ху $(X, \mathcal{M})$, поне една от които е крайна, такава че $\nu = \nu_+ - \nu_-$.

**Д-во** Нека $X = P \cup N$ е декомпозиция на Хан на $(X, \mathcal{M})$ относно $\nu$. Дефинираме изображенията

$\nu_+ : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ и $\nu_- : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$, като за $E \in \mathcal{M}$ полагаме $\nu_+(E) = \nu(E \cap P)$ и $\nu_-(E) = -\nu(E \cap N)$. Понеже $\nu$ е $P$-положителна и $N$-отрицателна, то $\nu_\pm(E) \geq 0 \; \forall E \in \mathcal{M}$. Ясно е, че $\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E)$, защото $X = P \cup N$ и $P \cap N = \emptyset$.

Понеже $\nu$, като знакопроменлива мярка, може да приема най-много една от стойностите $+\infty$ или $-\infty$, то поне едно от двете изображения $\nu_+$ и $\nu_-$ е крайно. Накрая, от $\nu(\emptyset) = 0$ непосредствено следва, че $\nu_\pm(\emptyset) = 0$, а от пълната адитивност на $\nu \Rightarrow \nu_+$ и $\nu_-$ също притежават това свойство. $\square$

<u>Опр.</u> Нека $\nu$ е знакопроменлива мярка в-ху измеримото $(X, \mathcal{M})$. Нека още $\nu = \nu_+ - \nu_-$ е нейната декомпозиция на Жордан. Мярката $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$ се нарича <u>пълна вариация</u> на $\nu$.

<u>Опр.</u> За $f \in L(X, |\nu|)$ полагаме

$$\int_X f \, d\nu := \int_X f \, d\nu_+ - \int_X f \, \nu_-,$$

където $\nu = \nu_+ - \nu_-$ е декомпозиция на Жордан за $\nu$.

<u>Зад4</u> (за изпит)

Установете съответствие между крайните борелови мерки в-ху даден краен затворен интервал и функциите с ограничена вариация в-ху същия интервал

## XI. Нормирани пространства. Пространства на Лебег. Хилбертови пространства. Представяне на ограничени линейни функционали.

<u>Опр.</u> Нека $V$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Казваме, че във $V$ е определена <u>норма</u> $\|V\|$, $v \in V$, ако на всеки елемент $v$ от $V$ се съпоставя реално число $\|V\|$ със свойствата:

(а) Неравенство на триъгълника
$\|V_1 + V_2\| \leq \|V_1\| + \|V_2\| \quad \forall V_1, V_2 \in V$

(б) $\|\lambda V\| = |\lambda| \|V\| \quad \forall v \in V$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(в) $\|V\| > 0 \quad \forall v \in V, v \neq \vec{0}$

Числата $\|V\|$ се наричат норма на $V$.

<u>Забел.</u> От посочените горе свойства $\Rightarrow \|\vec{0}\| = 0$ и $\|V\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

<u>Опр.</u> Линейно пространство с норма се нарича <u>нормирано</u>

Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е пространство с мярка ($\mu$ е ~~[illegible]~~ положителна мярка). Както по-рано доказахме, $L(X,\mu)$ е линейно пространство. В $L(X,\mu)$ дефинираме изображение
$\|f\| : L(X,\mu) \to \mathbb{R}$ като полагаме $\|f\|_L := \int_X |f| d\mu$.

$\|f\|_L$ притежава свойствата на норма в $L(X,\mu)$. Наистина, относно (а) имаме

$$\|f_1 + f_2\|_L = \int_X |f_1 + f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| d\mu + \int_X |f_2| d\mu = \|f_1\|_L + \|f_2\|_L$$

(б) $\|\lambda f\| = \int_X |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int_X |f| d\mu = |\lambda| \|f\|$

(в) $\|f\|_L = \int_X |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.н. в $X$

За да бъде удовлетворено (в) считаме, че две сумируеми функции, които совпадат п.н., са идентични, с други думи считаме, че $f=g \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ п.н. в $X$. И така отъждествяваме всеки две сумируеми функции, които се отличават една от друга в-ху множество с мярка 0.

Линейното пространство, което се получава след това отъждествяване, продължаваме да означаваме с $L(X,\mu)$.

След това отъждествяване вече имаме, че $\|f\|_L=0 \Leftrightarrow f=\dot{0}$ (т.е. $f(x)=0$ п.н. в $X$).

Линейното пространство $L(X,\mu)$, снабдено с нормата $\|f\|_L$, е нормирано.

<u>Опр.</u> Нека $V$ е нормирано линейно пространство с норма $\|\cdot\|$. Казваме, че редицата $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ е <u>сходяща</u> и има граница $v \in V$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$.

<u>Опр.</u> Казваме, че $\{v_n\}$ е <u>редица на Коши</u> в норм. лин. пр. $V$, ако $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|v_n - v_m\| = 0$

<u>Опр.</u> Казваме, че нормираното линейно пространство $V$ е <u>пълно</u>, ако всяка редица на Коши е сходяща с граница във $V$. Пълните линейни пространства се наричат <u>Банахови</u>.

<u>Т-ма</u> Пространството $L(X,\mu)$ е Банахово.

<u>Д-во</u> Трябва да докажем, че ако $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на Коши от функции в $L(X,\mu)$, то $\exists f \in L(X,\mu): \|f - f_n\|_L \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

изан $\|f_m - f_n\| \xrightarrow[n,m]{} 0$, то $\exists$ подредица $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_L < \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща почти навсякъде в $X$. За тази цел разглеждаме реда $f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$. Да забележим, че
$S_j(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{j}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = f_{n_j}(x)$.

Разглеждаме реда $\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$. Полагаме

$g_j(x) = \sum_{k=1}^{j}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)|$. Тогава $g_j \in M^+(X)$, $\{g_j\}$ е растяща $\Rightarrow \exists\, g(x) = \lim_{j\to\infty} g_j(x)$ п.н. като $g \in M^+(X)$ и, както следва от БЛ,

$$\int_X g_j\,d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_X g\,d\mu.$$

За инт. на $g_j$ имаме

$$\int_X g_j\,d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{j}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\,d\mu = \sum_{k=1}^{j}\int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\,d\mu = \sum_{k=1}^{j}\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_L$$

$$\le \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 \ \forall j$$ (т.е. $\|g_j\|_L \le 1\ \forall j$). Оттук $\Rightarrow \|g\|_L = \int_X g\,d\mu =$

$$= \lim_{j\to\infty}\|g_j\|_L \le 1 \Rightarrow g \in L(X,\mu).$$

На свой ред оттук следва, че $g(x)$ е крайна п.н. $\Rightarrow$ редът е сходящ към крайна граница п.н. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ е абс. сходящ, т.е. $\exists f(x) = \lim_{j\to\infty} S_j(x)$ п.н. в $X$.

Ще докажем, че $f \in L(X,\mu)$ и $\|f - f_n\|_L \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Относно първото,

използваме, че $|f_j(x)| \le |f_{n_1}(x)| + g_j(x)$ п.н. $\overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} |f(x)| \le |f_{n_1}(x)| + g(x)$ п.н.
Но $|f_{n_1}|$ и $g \in L(X,\mu) \Rightarrow f \in L(X,\mu)$.

Ще докажем, че $\|f - f_{n_k}\|_L \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ще се възползваме от теоремата на Лебег. Прилагаме я към $\{f - f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$.

Първо, имаме $f - f_{n_j} \in L(X,\mu)\ \forall j$

Второ, $|f(x) - f_{n_j}(x)| \le |f(x)| + |f_{n_1}(x)| + g(x) \in L(X,\mu)$.

Накрая редицата $\{f - f_j\}$ е сходяща към 0 п.н.

$\overset{\text{Лебег}}{\Longrightarrow} \|f - f_{n_j}\|_L = \int_X |f - f_{n_j}| d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_X 0 d\mu = 0$. Остава да се възползваме от факта, че $\|f - f_j\|_L \le \underbrace{\|f - f_{n_j}\|_L}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|f_{n_j} - f_j\|_L}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0}$ □

Съвкупността от измерими функции $L_p(X,\mu) = \{f \in M(X,\mu) : |f|^p \in L\}$, $1 < p < \infty$, е линейно пространство, което се превръща в нормирано с нормата $\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Отново сме отъждествили функциите, които съвпадат п.н.

Неравенството на триъгълника тук наричаме неравенство на Минковски:

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Забелязваме, че $L_1 = L$.

<u>Т-ма</u> $L_p(X,\mu)$ е Банахово за $\forall p \in (1,\infty)$

От интерес е и пространството от измерими функции $L_\infty(X,\mu)$
$L_\infty(X,\mu) := \{f \in M(X,\mu) : \exists c \in \mathbb{R}, |f(x)| \le c \text{ п.н.}\}$. То е нормирано с норма
$\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \le c \text{ п.н.}\} = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : |f(x)| > c) = 0\}$.

<u>Т-ма</u> Пространството $L_\infty$ е Банахово

Пространствата $L_p(X,\mu)$, $1 \le p \le \infty$ се наричат лебегови.

18.05.2018

Зад. 15 (за изпит)

Нека $f, g \in L(\mathbb{R}, m)$. Докажете, че:

(а) ф-ята $f(x-t)g(t)$ е сумируема

(б) $h \in L(\mathbb{R}, m)$, където $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$

(в) $\|h\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

Зоб. ф-цията $h$ се нарича конволюция на $f(x)$ и $g(x)$ и се означава чрез $f * g(x)$. Може да се докаже, че операцията $*$ е комутативна, асоциативна и дистрибутивна.

Зоб. (упътване) Забелязваме, че ф-цията $f(x-t)g(t)$ е измерима като ф-ция на $(x,t)$. Прилагаме т-мата на Фубини. Използваме инвариантността на $m$ при транслации:

$$\int_{\mathbb{R}} F(x+t)\, dm(t) = \int_{\mathbb{R}} F dm \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Опр. Казваме, че линейно пространство (над $\mathbb{R}$) е <u>хилбертово</u>, ако в него има въведено скаларно произведение и то е пълно относно нормата, породено от скаларното произведение.

<u>Опр. Скаларно произведение</u> $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in H$:
$(v,v) \geq 0 \ \forall v \in H$, като $(v,v) = 0 \iff v = \vec{0}$

Опр. Норма, породена от скаларно произведение $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$.

<u>Пр. 1</u> $L_2(X,\mu)$ е ~~хилбертово~~ хилбертово, като

$$(f,g) := \int_X fg\,d\mu \ ; f,g \in L_2(X,\mu)$$

$$\|f\|_{L_2} := \int_X f^2 d\mu = \sqrt{(f,f)}$$

Неравенство на Коши - $|(v_1,v_2)| \leq \sqrt{(v_1,v_1)\cdot(v_2,v_2)}$

Опр. Нека $V$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Линеен функционал над $V$ наричаме всяко изображение $\ell: V \to \mathbb{R}$ със свойствата

(а) $\ell(v_1+v_2) = \ell(v_1) + \ell(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$

(б) $\ell(\lambda v) = \lambda \ell(v) \ \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Пр. 2</u> $V = L(X,\mu)$, $\ell(f) = \int_X f\,d\mu$ са линейни ф-ли

<u>Пр. 3</u> $V = C[a,b]$, $\ell(f) = \int_a^b f(x)dx$ (риманов интеграл) са линейни ф-ли

Пр.4 $f \in C[a,b]$, $c \in [a,b]$

$l(f) = f(c)$ е линеен функционал. Наистина,

а) $l(f+g) = (f+g)(c) = f(c) + g(c) = l(f) + l(g)$

б) $l(\lambda f) = (\lambda f)(c) = \lambda l(f)$

Опр. Нека $V$ е нормирано линейно пространство над $\mathbb{R}$ и $l: V \to \mathbb{R}$ е линеен функционал. Казваме, че $l$ е ограничен, ако $\exists c > 0$: $|l(v)| \leq c\|v\|$ $\forall v \in V$

Пр.5 $\underbrace{L(X,\mu)}_{V}$, нормирано с $\|f\|_L = \int_X |f| d\mu$

$l(f) = \int_X f d\mu$. Имаме, че $|l(f)| = \left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu = \|f\|_L$.

$\Rightarrow$ функционалът е ограничен за $c \geq 1$

Пр.6 $V = C[a,b]$, нормирано с $\|f\|_c = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

$l(f) := \int_a^b f(x)dx$

$|l(f)| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_c} dx \leq (b-a)\|f\|_c$

Т-ма (Рис) Всеки ограничен линеен функционал, дефиниран над $C[a,b]$, се представя във вида

$l(f) = \int_a^b f dv$, където $v$ е крайна борелова знакопроменлива мярка в-ху $[a,b]$

Зад Крайните борелови знакопроменливи мерки се наричат радонови

Т-ма (Рис) Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е $\sigma$-крайно пространство с мярка и $1 \le p < \infty$. Всеки ограничен линеен функционал $l$ в-ху $L_p(X,\mu)$ се представя във вида

$$l(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \in L_p(X,\mu), \; g \in L_q(X,\mu), \text{ където } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Зад При $p=2$, $L_2(X,\mu)$ е хилбертово. Ако $l : L_2(X,\mu) \to \mathbb{R}$ е ограничен линеен функционал, то $\exists g \in L_2(X,\mu) : l(f) = \int_X fg \, d\mu \quad \forall f \in L_2(X,\mu)$

## XII. Т-ма на Радон-Никодим. Т-ма на Лебег за декомпозиция на мярката

Нека $(X, \mathcal{F})$ е измеримо пространство. Нека $\mu$ е мярка в-ху него и $f \in M^+(X, \mathcal{F})$. Както знаем, изобр. $\nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, деф. чрез

$$\nu(S) = \int_S f\,d\mu = \int_X \chi_S f\,d\mu, \quad S \in \mathcal{F}$$

е мярка в-ху $(X, \mathcal{F})$

(тук под мерки имаме предвид пълни мерки).

Да забележим, че ако $\mu(S) = 0$, то и $\nu(S) = 0$ (това е така, защото $\chi_S f \in M^+$ и $\chi_S f = 0$ п.н. отн. $\mu$)

Забележително е, че и обратното е вярно, а именно ако $\mu$ и $\nu$ са две положителни мерки в-ху $(X, \mathcal{F})$ и $\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$, то $\nu(S) = \int_S f\,d\mu$ $\forall S \in \mathcal{F}$ за някоя ф-ция $f$.

<u>Опр.</u> Нека $\mu$ и $\nu$ са положителни мерки в-ху измеримото пр-во $(X, \mathcal{F})$. Казваме, че $\nu$ е абс. непр. спрямо $\mu$, ако $\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$. Пишем $\nu \ll \mu$.

<u>Т-ма</u> (Радон-Никодим) Нека $\mu$ и $\nu$ са крайни положителни мерки в-ху измеримото пр-во $(X, \mathcal{F})$. Нека $\nu \ll \mu$. Тогава $\exists h \in L(X, \mu) : \int_X F\,d\nu = \int_X F h\,d\mu$ $\forall F \in M^+(X, \mathcal{F})$. В частност, за $F = \chi_S, S \in \mathcal{F}$ имаме, че $\nu(S) = \int_X \chi_S\,d\nu = \int_X \chi_S h\,d\mu$.

Заб. Може още да се докаже, че $h(x) \geq 0$ п.н. (отн. $\mu$) и $h$ е единствена с точност до множество с $\mu$-мярка нула.

Заб. Ф-ята $h$ се нарича производна на $\nu$ отн. $\mu$ и се означава чрез $\frac{d\nu}{d\mu}$. С това означение твърдението на т-мата се записва и така:

$$\int_X F\, d\nu = \int_X F \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \quad \forall F \in M^+$$

Д-во (на т-мата) Разглеждаме лин. ф-нал $\ell$ в-ху $L_2(X, \mu+\nu) = L_2(X,\mu) \cap L_2(X,\nu)$, дефиниран чрез $\ell(f) = \int_X f\, d\nu$. Този функционал е ограничен. Действително, $|\ell(f)| = \left|\int_X f\, d\nu\right| \leq \int_X |f|\, d\nu$ за $f \in L_2(X,\mu+\nu)$

$$|\ell(f)| \leq \int_X |f|\, d\nu = \int_X |f| \cdot 1\, d\nu \leq \int_X |f| \cdot 1\, d(\mu+\nu) \overset{\text{Коши}}{\leq} \sqrt{\int_X |f|^2 d(\mu+\nu) \cdot \int_X 1^2 d(\mu+\nu)} =$$

$$= \|f\|_{L_2(X,\mu+\nu)} \cdot \underbrace{\sqrt{(\mu+\nu)(X)}}_{\sqrt{\mu(X)+\nu(X)} \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

Така показахме, че $|\ell(f)| \leq \sqrt{(\mu+\nu)(X)}\, \|f\|$, следователно $\ell$ е ограничен. С това доказахме, че $\ell : L_2(X,\mu+\nu) \to \mathbb{R}$ е ограничен. Прилагаме т-мата на Рис за представяне на огр. лин. функционали в-ху хилбертови пространства. Така получаваме, че $\exists g \in L_2(X,\mu+\nu) : \ell(f) = \int_X fg\, d(\mu+\nu)$ $\forall f \in L_2(X,\mu+\nu)$. Това равенство се записва още така:

$$\int_X f\, d\nu = \int_X fg\, d(\mu+\nu) = \int_X fg\, d\mu + \int_X fg\, d\nu,$$

следователно $\int\limits_X f\,d\nu - \int\limits_X fg\,d\nu = \int\limits_X fg\,d\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_X f(1-g)\,d\nu = \int fg\,d\mu \quad \forall f \in L_2(X,\mu) \cap L_2(X,\nu) \qquad (1)$$

Ще докажем, че $0 \le g(x) < 1$ п.н. отн. $\mu$. Разглеждаме множествата $S' = \{x \in X : g(x) \ge 1\}$ и $S'' = \{x \in X : g(x) < 0\}$. Ще докажем, че $\mu(S') = \mu(S'') = 0$. Оттук ще следва $0 \le g(x) < 1$ п.н. отн. $\mu$.

Ясно е, че ако $S \in \mathcal{F}$, то $\chi_S \in L_2(X,\mu) \cap L_2(X,\nu)$ (крайни мерки)

Следователно (1) е в сила за $f = \chi_{S'}$. Това дава, че

$$\underbrace{\int \chi_{S'}(1-g)\,d\nu}_{\le 0} = \underbrace{\int \chi_{S'} g\,d\mu}_{\ge 0} = 0 \xRightarrow{\chi_{S'} g \in M^+} \chi_{S'} g = 0 \ \mu\text{-п.н.}$$

. Но в-ху $S'$ $g(x) \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_{S'} = 0$ $\mu$-п.н. $\Rightarrow \mu(S') = 0$. Аналогично се доказва, че $\mu(S'') = 0$.

С подобни разсъждения пак се вижда, че $\int \underbrace{\chi_{S''} g}_{\le 0}\,d\mu = 0 \xRightarrow{\chi_{S''} g \in M^+}$

$\Rightarrow \chi_{S''} g = 0$ $\mu$-п.н. $\Rightarrow \chi_{S''} = 0$ $\mu$-п.н. $\Rightarrow \mu(S'') = 0$.

Понеже $\nu \ll \mu$, то $\nu(S') = \nu(S'') = 0$.

Както по-рано отбелязахме, (1) е в сила за всяка характеристична функция на измеримо множество. Сега от линейността на $\int \Rightarrow$ (1) е в сила в-ху $SF^+(X)$. Както използваме, че всяка неотрицателна измерима ф-ция може да се представи като граница на монотонно растяща редица от неотр. прости функции и приложим т-мата на БЛ заключаваме, че (1) е в сила в-ху $M^+(X, \mathcal{F})$.

Нека $F \in M^+(X,\mathcal{F})$. Прилагаме (1) с $f = \frac{F}{1-g} \in M^+(X,\mathcal{F})$. Тога получаваме, че

$$\int_X \frac{F}{1-g}(1-g)\,d\nu = \int_X \frac{F}{1-g}\, g\, d\mu \Rightarrow \int_X F\,d\nu = \int_X F h\, d\mu, \quad (2)$$ където сме

положили $h = \frac{g}{1-g} \in M^+(X,\mathcal{F})$. Остава да установим, че $h \in L(X,\mu)$. За този цел в (2) полагаме $F = 1$ (т.е. $F = \chi_X$). Получаваме

$\nu(X) = \int_X 1\,d\nu = \int_X h\,d\mu$, но $\nu(X) < \infty$.

$\square$

Заб. Т-мата се обобщава за $\sigma$-крайни пространства, като тогава $h \in M^+(X,\mathcal{F})$. Тя се обобщава и за знакопроменливи мерки $\nu \ll \mu$, $\mu$ - положителна, като тогава, ако $\mu$ и $\nu$ са крайни, отново имаме $h \in L(X,\mu)$, но изобщо $h \not\geq 0$ п.н.

Опр. Казваме, че положителните мерки $\mu$ и $\lambda$ в-ху $(X,\mathcal{F})$ са взаимно сингулярни, ако $\exists S \in \mathcal{F}: \mu(S) = 0$ и $\lambda(S^c) = 0$. Пишем $\mu \perp \lambda$.

Пр. 1 Положителните мерки $\nu_+$ и $\nu_-$ в декомпозицията на Жордан на знакопроменливата мярка $\nu$ са взаимно сингулярни. Тук $S = N$ от декомпозицията на Хан.

Т-ма (Лебег, за декомпозиция на мярка).
Нека $\mu$ и $\nu$ са крайни, положителни мерки в-ху измеримото пространство $(X,\mathcal{F})$. Тогава $\exists$ крайни положителни мерки $\lambda$ и $\rho$ в-ху $(X,\mathcal{F})$ такива, че $\nu = \lambda + \rho$, $\lambda \ll \mu$ и $\rho \perp \mu$.

Д-во Нека $g(x)$ е функцията, фиксирана в д-вото на т-мата на Радон - Никодим.

Полагаме $\mathcal{Y} = \{x \in X : 0 \le g(x) < 1\}$. Както установихме в това д-во, $\mu(\mathcal{Y}^c)=0$. Също така, да припомним, че (1) е в сила $\forall f \in M^+(X,\mathcal{F})$. Полагаме

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1-g(x)}, & x \in \mathcal{Y} \\ 0, & x \in \mathcal{Y}^c. \end{cases}$$

Тогава (1) влече

$$\int_{\mathcal{Y}} F\,d\nu = \int_{\mathcal{Y}} F h\,d\mu = \int_X F h\,d\mu \quad \forall F \in M^+ \qquad (3)$$

Дефинираме положителната (крайна) мярка $\lambda$ в-ху $(X,\mathcal{F})$, като полагаме $\lambda(S) = \nu(S \cap \mathcal{Y})$, $S \in \mathcal{F}$.

Тогава (3) може да се запише във вида

$$\int_X F\,d\lambda = \int_X F h\,d\mu, \quad F \in M^+(X,\mathcal{F}) \qquad (4)$$

От (4) $\Rightarrow$, че $\lambda \ll \mu$.

Накрая дефинираме крайната положителна мярка $\rho$ в-ху $(X,\mathcal{F})$, като полагаме $\rho(S) = \nu(S \cap \mathcal{Y}^c)$, $S \in \mathcal{F}$.

Тогава $\nu = \lambda + \rho$ и $\rho(\mathcal{Y}) = \nu(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}^c) = \nu(\emptyset) = 0$, а $\mu(\mathcal{Y}^c) = 0 \Rightarrow \rho \perp \mu$ $\square$

25.05.2018 XIII. Диференцируемост п.н. на монотонните функции

Опр. Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $x_0\in(a,b)$. Производните на Дини на $f(x)$ в т. $x_0$ се дефинират чрез

$$D_- f(x_0) := \liminf_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad D^- f(x_0) := \limsup_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$D_+ f(x_0) := \liminf_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad D^+ f(x_0) := \limsup_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Зад. По деф. $\liminf\limits_{x\to x_0} F(x) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \inf\limits_{\substack{x\in(x_0-\varepsilon,\,x_0+\varepsilon)\\ x\neq x_0}} F(x)$

$$\limsup_{x\to x_0} F(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sup_{\substack{x\in(x_0-\varepsilon,\,x_0+\varepsilon)\\ x\neq x_0}} F(x)$$

Ясно е, че една ф-ция $f(x)$ е диференцируема в $x_0$, когато $D_- f(x_0) = D^- f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^+ f(x_0)$. При това, $f'(x_0)$ е крайна $\Leftrightarrow$ която и да е от производните на Дини е крайна.

По-нататък да забележим, че за да докажем, че $f(x)$ е диф. (макар и с производна $\pm\infty$) п.н. (относно лебеговата мярка $m$), е достатъчно да установим следната верига от неравенства:

$$\underbrace{D_- f(x) \le D^- f(x)}_{\text{следва от деф}} \underset{(1)}{\le} \overbrace{D_+ f(x) \le D^+ f(x)}^{\text{следва от деф}} \underset{(2)}{\le} D_- f(x)$$

Да забележим, че (1) влече (2). Действително, ако вече сме установили (1) за всяка монотонно растяща ф-ция, деф. в-ху краен затворен интервал, то ако $g(x)$ е монотонна в-ху $[a,b]$, разглеждаме функцията

$$\tilde{g}(x) = -g(-x),\ x \in [-b,-a].$$

Функцията $\tilde{g}(x)$ е монотонно растяща. За нея от (1) $\Rightarrow$

$$D^{-}\tilde{g}(x) \le D_{+}\tilde{g}(x) \text{ п.н. в } [-b,-a].$$

Остава да забележим, че $D^{-}\tilde{g}(x) = D^{+}\tilde{g}(x)$ и $D_{+}\tilde{g}(x) = D_{-}g(-x)$, за да установим (2) за $g(x)$ п.н. в $[a,b]$.

За да установим, че всяка монотонно растяща функция, дефинирана в краен затворен интервал е диф. п.н., е достатъчно да покажем, че

$$D^{-}f(x) \le D_{+}f(x) \text{ п.н.}$$

Да забележим, че ако за някое $x_0 \in (a,b)$ горното равенство не е изпълнено, т.е. имаме, че

$$D_{+}f(x_0) < D^{-}f(x_0),$$

но това е така $\Leftrightarrow \exists p,q \in \underset{m(\mathbb{Q})=0}{\mathbb{Q}} : D_{+}f(x_0) < p < q < D^{-}f(x_0)$.

Следователно, за да докажем, че $D^{-}f(x) \le D_{+}f(x)$ п.н. в $[a,b]$, е достатъчно да покажем, че за множествата

$$E_{p,q} = \{x \in (a,b) : D_{+}f(x) < p < q < D^{-}f(x)\}$$

имаме, че $m(E_{p,q}) = 0\ \forall p,q \in \mathbb{Q}$, защото тогава

$E = \{x \in (a,b) : D_{+} < D^{-}f(x)\} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} E_{p,q}$ и $\Rightarrow m(E) = 0$.

Опр. Нека $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $x_0\in[a,b]$. Казваме, че $x_0$ е точка в сянка, ако $\exists\, \xi\in[a,b]: \xi > x_0$ и $g(\xi) > g(x_0)$.

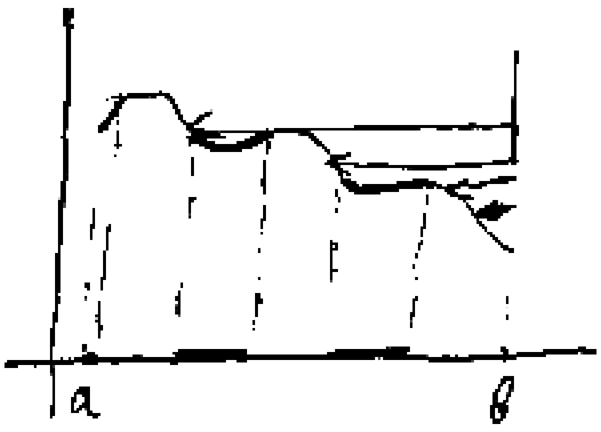
Лема (за изгряващото слънце, Рис)

Нека $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава множеството от точки в сянка на $g(x)$ представлява изброимо обединение на непресичащи се два по два отв. интервали $(a_k, b_k)$, $k=1,2,\dots$, като $g(a_k)\le g(b_k)\ \forall k$.

Зад. Всъщност имаме $g(a_k)=g(b_k)$, освен ако $a_k=a$.

Лема 1 Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната и монотонно растяща. Ако за всяко $x\in E\subseteq(a,b)$ имаме, че $D_+f(x)<p$, където $0<p<\infty$, то външната лебегова мярка на $f(E)$

$m^*(f(E))\le p\,m^*(E)$




Д-во Нека $x_0\in E$. Тогава $x_0\in(a,b)$ и $D_+f(x_0)<p$. Следователно съществува $\xi\in(a,b): \xi>x_0$ и $\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}<p$. Тогава

$px_0 - f(x_0) < p\xi - f(\xi)$.

Полагаме $g(x)=px-f(x)$. Тогава имаме, че $x_0<\xi$ и $g(x_0)<g(\xi)$. Следователно $x_0$ е точка в сянка на $g(x)$.

Следователно, какъвто и отворен интервал $(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$ да фиксираме, имаме, че $E\cap(\alpha,\beta)$ се съдържа в множеството от точки в сянка на $g(x)$ в-ху $(\alpha,\beta)$. От лемата за изгряващото слънце $\Rightarrow E\cap(\alpha,\beta)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$, където $(\alpha_k,\beta_k)\subseteq(\alpha,\beta)\ \forall k$, $(\alpha_k,\beta_k)\cap(\alpha_l,\beta_l)=\emptyset$ за $k\ne l$ и $g(\alpha_k)\le g(\beta_k)\ \forall k$.

Допускаме, че $f(E\cap(\alpha,\beta)) \subseteq f(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f((\alpha_k,\beta_k)) \overset{f\uparrow}{\subseteq} \bigcup_{k=1}^{\infty}[f(\alpha_k), f(\beta_k)]$

$\Rightarrow m^*(f(E\cap(\alpha,\beta))) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(f(\beta_k), f(\alpha_k))$.

От друга страна, неравенството $g(\alpha_k) \leq g(\beta_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow p\alpha_k - f(\alpha_k) \leq p\beta_k - f(\beta_k) \Rightarrow f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq p(\beta_k - \alpha_k)\ \forall k$

Следователно $m^*(f(E\cap(\alpha,\beta))) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(\beta_k - \alpha_k) = p\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) \leq p(\beta-\alpha)$ (1)

защото $(\alpha_k,\beta_k)$ не се пресичат два по два и $\subseteq(\alpha,\beta)$.

Накрая, нека $\varepsilon>0$ е произволно фиксирано. Тогава $\exists$ отв. мн. $G \subseteq (a,b)$, такова, че $E\subseteq G$ и $m^*(G) = m^*(E)+\varepsilon$. (да припомним, че $m^*(E) = \inf_{O\supseteq E} m^*(O)$). Щом $G$ е отв., то се представя във вида

$G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$, където интервалите не се пресичат два по два и се съдържат в $(a,b)$.

Тогава $m^*(f(E)) = m^*(f(E\cap G)) = m^*(f(\bigcup_{k=1}^{\infty} E\cap(a_k,b_k))) =$

$= m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} f(E\cap(a_k,b_k))) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(E\cap(a_k,b_k))) \underset{(1)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} p(b_k - a_k) = pm^*(G) \leq$

$\leq p(m^*(E)+\varepsilon)$

Така за всяко положително $\varepsilon$ установихме, че $m^*(f(E)) \leq pm^*(E) + p\varepsilon$

$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} m^*(f(E)) \leq pm^*(E)$. □

Аналогично се доказва

Лема 2 Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната и монотонно растяща. Ако $\forall x\in E\subseteq(a,b)$ имаме, че $D^- f(x) > q$, $0\leq q<\infty$, то $m^*(f(E)) \geq q\, m^*(E)$

Т-ма (Лебег) Всяка непрекъсната, монотонно растяща функция, деф. в-ху краен затворен интервал, притежава крайни производни п.н.

Д-во Както се убедихме в началото, за да докажем, че непр. мон. растяща ф-ция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е диф. п.н., е достатъчно да установим, че $m^*(E_{p,q})=0$, $p<q$, $p,q\in\mathbb{Q}$. От лема 1 и лема 2

$\Rightarrow q\, m^*(E) \overset{\text{Л2}}{\leq} m^*(f(E_{p,q})) \overset{\text{Л1}}{\leq} p\, m^*(E_{p,q})$

. Да припомним, че

$$E_{p,q}=\{x\in(a,b):\ D_+f(x)<p<q<D^-f(x)\}$$

$\Rightarrow E_{p,q}\subseteq E$ (от лема 1) и $E_{p,q}=E$ (от лема 2).

Следователно $(\underbrace{q-p}_{>0})\,m^*(E)\leq 0 \Rightarrow m^*(E)=0$. Остана да докажем, че $f'(x)$ е крайна п.н. Разглеждаме множеството

$E_\infty=\{x\in(a,b):\ f'(x)=+\infty\}$.

Тогава имаме, че $D^-f(x)>q\ \forall q>0\ \forall x\in E_\infty \overset{\text{Л2}}{\Rightarrow} m^*(f(E_\infty))\geq q\,m^*(E_\infty)\ \forall q>0$

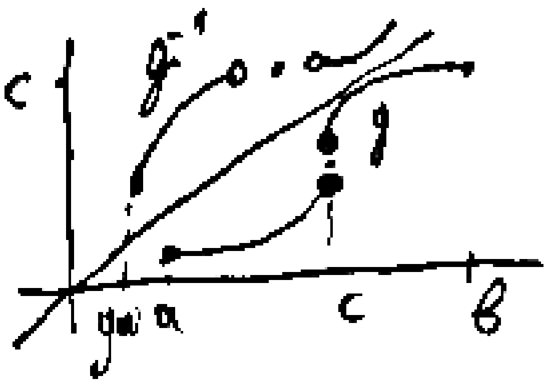
$\Rightarrow m^*(E_\infty)\leq \frac{1}{q}m^*(f(E_\infty))\leq \frac{1}{q}(f(b)-f(a))\ \forall q>0.$

$\Rightarrow m^*(E_\infty)=0.$ $\square$

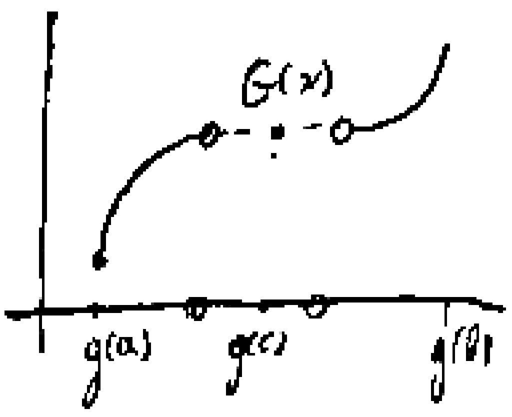
Т-ма (Фабер - Чизъм - Янг) Всяка монотонна функция, дефинирана в-ху (краен затворен) интервал, притежава крайна производна п.н.

Сл. 1 Всяка ф-ция с огр. вар. притежава крайна производна п.н.

Д-во (Фабер-Чизьи-Янг) Схема на доказателството:
Ще сведем твърдението на теоремата към теоремата на Лебег. Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е мон. растяща. Тогава $g(x)=f(x)+x$ е строго мон. растяща и следователно обратната ѝ е непр. и мон. растяща в-ху своята деф. област. Продължаваме $g^{-1}$ до непрекъсната, монотонно растяща функция в-ху $[g(a),g(b)]$. Означаваме това продължение с $G(x), x\in[g(a),g(b)]$




~~Използваме~~ Прилагаме теоремата на Лебег към непр. мон. раст. ф-ция $G(x)$ в $[g(a),g(b)]$. Така установихме, че $\exists$ крайна $G'(x)$ п.н. в $[g(a),g(b)]$. Сега от т-мата за диф. на обр. ф-ция $\Rightarrow$ $g(t)$ е диф. п.н. в $[a,b]$. Остава да се покаже, че множеството от точки, в които $g'(x)=+\infty$ има мярка 0. Това става аналогично на д-вото на лема 1. □




Ще разгледаме накрая въпроса за възстановяване на мон. ф-ции чрез интеграл от производните им.
По-точно, нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е монотонно растяща. Знаем вече, че $f'(x)$ съществува като число п.н. Дали обаче

$\exists \int_a^b f'\,dm \overset{?}{=} f(b)-f(a)$

Пр. 1 $f=\chi_{[d,b]}$ за някое $d\in(a,b)$

$f(x)\in\uparrow$, $f'(x)=0$ п.н. $\Rightarrow \int_a^b f'\,dm=0$, но $f(b)-f(a)=1-0=1$

Т-ма Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е монотонно растяща. Тогава $f'\in L[a,b]$ и $\int_a^b f'\,dm \le f(b)-f(a)$

**Д-во** Продължаваме $f(x)$ надясно от $b$, като полагаме $f(x) = f(b)$ за $x > b$. Разглеждаме редицата от функции с общ член

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\tfrac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Както следва от т-мата на Фабер-Чизем-Юнг, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{п.н.}{=} f'(x)$.
Понеже $f(x)$ е мон. растяща, то $f_n(x) \geq 0 \ \forall x \ \forall n$.

Освен това, $f(x)$ и $f(x+\frac{1}{n})$, бидейки монотонно растящи, са измерими. Следователно $f_n \in M^+$, $f'(x)$ се явява граница п.н. на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow f' \in M^+$. Ще докажем, че

$\int_a^b f' dm < \infty$ и ще докажем съвременно неравенството.

Така ще установим и сумируемостта на $f'$.

За тази цел ще приложим лемата на Фату. От нея следва, че

$$\int_a^b \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f_n}_{\overset{п.н.}{=} f'(x)} dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n dm$$

Ще пресметнем дясната страна.

$$\int_a^b f_n dm = n\int_a^b f\left(x+\tfrac{1}{n}\right) dm - n\int_a^b f(x) dm \overset{Л\int = Р\int}{=} \int_a^b f\left(x+\tfrac{1}{n}\right) dx - n\int_a^b f(x)dx =$$

$$= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_a^b f(x)dx = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} \underbrace{f(x)}_{f(b)}dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} \underbrace{f(x)}_{\geq f(a)}dx \leq n f(b)\int_b^{b+\frac{1}{n}} dx - n f(a)\int_a^{a+\frac{1}{n}} dx =$$

$= f(b) - f(a) \Rightarrow$ н-вото и $f' \in L[a,b]$

$\square$

01.04.2016

## XIV. Абсолютно непрекъснати функции. Неопределен лебегов интеграл. Основна т-ма на ДИС за лебеговия интеграл.

Зад. Навсякъде става дума за лебеговата мярка $m$ в-ху $\mathbb{R}$

Опр. Казваме, че $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е абсолютно непрекъсната, ако $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall (a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$ - непресичащи се два по два подинтервала на $[a,b]$ такива, че ако е изпълнено $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, да имаме, че $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

Съвкупността от тези функции се означава чрез $AC[a,b]$.

Зад. От самата деф. веднага следва, че $\forall$ абсолютно непрекъсната функция е непрекъсната в $[a,b]$. Но не всяка непрекъсната функция е абсолютно непрекъсната в $[a,b]$.

Отново непосредствено от деф. се установява следната теорема

Т-ма Сума, произведение и частно (стига знаменателя да не се нулира) на абсолютно непрекъснати функции в-ху краен затворен интервал също са абсолютно непрекъснати функции в-ху него.

Зад. Композицията на абсолютно непрекъснати функции не винаги е абсолютно непрекъсната.

Т-ма Всяка абс. непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ф-ция с ограничена вариация в-ху същия интервал

Д-во Нека $f \in AC[a,b]$. Тогава $\exists \delta > 0$: за всеки $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$, непресичащи се два по два такива, че

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ имаме, че } \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Следователно пълната вариация на $f(x)$ в-ху интервал с дължина $< \delta$ не надминава 1.

За да завършим доказателството остава да използваме адитивността на пълната вариация.

Нека $\tau: a = x_0 < \dots < x_N = b$ е разбиване на $[a,b]$ с $d(\tau) < \delta$. Тогава, както отбелязахме по-горе,

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

следователно $\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^{N} \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f_i \leq N \Rightarrow f \in BV[a,b]$.

$\square$

След като всяка функция с ограничена вариация е диф. п.н. и производната ѝ е сумируема, достигаме до следното следствие

Сл. 1 Ако $f \in AC[a,b]$, то $f(x)$ притежава крайна производна п.н. и $f' \in L[a,b]$.

Т-ма (Основна т-ма на ДИС (неопр. интеграл)) Нека $f \in L[a,b]$. Дефинираме $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ посредством

$$F(x) = \int_a^x f \, dm, \quad x \in [a,b]$$

Тогава $F \in AC[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ п.н.

2-во Да забележим първо, че твърдението

$$F \in AC[a,b] \sim \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : m(S) < \delta \Rightarrow \int_S |f| dm < \varepsilon$$

А последното свойство вече е известно (от упражненията)

Преминаваме към д-вото на $F'(x) = f(x)$ п.н. Да забележим, че е достатъчно да докажем, че $F'(x) \leq f(x)$ п.н. Действително, ако вече сме установили това н-во за $\forall f \in L[a,b]$, то то с функцията $g = -f$ вместо $f$ влече.

$G'(x) \leq g(x)$ п.н.,

където $G(x) = \int_a^x g \, dm$.

Тогава $G(x) = -\int_a^x f dm = -F(x) \Rightarrow -F'(x) \overset{\text{п.н.}}{\leq} -f(x)$, т.е. $F'(x) \geq f(x)$ п.н.

Така имаме едновременно, че $F'(x) \overset{\text{п.н.}}{\leq} f(x)$ и $F'(x) \overset{\text{п.н.}}{\geq} f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$.

И така, за да завършим доказателството на теоремата остава да покажем, че $F'(x) \leq f(x)$ п.н., т.е. $E = \{x \in (a,b) : f(x) < F'(x)\}$ има мярка 0.

За $p, q \in \mathbb{Q} : p < q$ въвеждаме множествата

$$E_{p,q} = \{x \in (a,b) : f(x) < p < q < F'(x)\}$$

Тогава $E = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} E_{p,q}$ и за да докажем, че $m(E) = 0$ е достатъчно да докажем, че $m(E_{p,q}) = 0 \; \forall p, q \in \mathbb{Q}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Тогава $\exists \delta > 0 : \int_S |f| dm < \varepsilon$ стига $m(S) < \delta$. Фиксираме такова $\delta$. Б.о.о. можем да считаме, че $\delta \leq \varepsilon$. Нека $p, q \in \mathbb{Q}$ с $p < q$ са фиксирани. Нека $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$, където $(a_k, b_k)$ не се пресичат два по два и се съдържат в $(a,b)$, е отв. мн.

което съдържа $E_{p,q}$, като $m(\mathcal{U}\setminus E_{p,q})<\delta$.

Полагаме $\mathcal{U}_k = E_{p,q}\cap(a_k,b_k) = \{x\in(a_k,b_k):\ f(x)<p<q<F'(x)\}$.

Ако $x_0\in\mathcal{U}_k$ за някое $k$, то $\exists\, \xi>x_0,\ \xi\in(a_k,b_k)$:

$$\frac{F(\xi)-F(x_0)}{\xi-x_0}>q \Rightarrow F(\xi)-F(x_0)>q\xi-qx_0 \Rightarrow F(x_0)-qx_0<F(\xi)-q\xi.$$

Следователно $x_0$ е точка в сянка на функцията $H(x)=F(x)-qx$ в-ху $(a_k,b_k)$. Следователно $\mathcal{U}_k\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_{k,j},\beta_{k,j})$, където интервалите не се пресичат два по два, съдържат се в $(a_k,b_k)$ и $H(\alpha_{k,j})\leq H(\beta_{k,j})$ $\forall j$. Последното влече, че $F(\alpha_{k,j})-q\alpha_{k,j}\leq F(\beta_{k,j})-q\beta_{k,j}\Rightarrow$

$$\Rightarrow q(\beta_{k,j}-\alpha_{k,j})\leq F(\beta_{k,j})-F(\alpha_{k,j})=\int_{\alpha_{k,j}}^{\beta_{k,j}} f\,dm\ \ \forall j. \qquad (1)$$

Полагаме $T=\bigcup_{k,j=1}^{\infty}(\alpha_{k,j},\beta_{k,j})$. $T$ е отворено $\Rightarrow$ измеримо и $E_{p,q}\subseteq T\subseteq\mathcal{U}$. От (1) $\Rightarrow qm(T)=q\sum_{k,j=1}^{\infty}(\beta_{k,j}-\alpha_{k,j})\leq\int_T f\,dm.$ (2)

Ако $q\geq 0$, то от $m(E_{p,q})\leq m(T)\Rightarrow q\,m(E_{p,q})\leq q\,m(T)\overset{(2)}{\leq}\int_T f\,dm$ (3)

Ако $q<0$, то от (2) $\Rightarrow m(T)\geq\frac{1}{q}\int_T f\,dm$. Следователно, тъй като $m(\mathcal{U})\geq m(T)$, имаме, че $\underset{m(E_{p,q})+m(\mathcal{U}\setminus E_{p,q})<\delta\leq\varepsilon}{\underset{\vee}{m(\mathcal{U})}}\geq\frac{1}{q}\int_T f\,dm$.

Следователно, $m(E_{p,q})\geq\frac{1}{q}\int_T f\,dm-\varepsilon$

$\overset{q<0}{\Rightarrow} q\,m(E_{p,q})\leq\int_T f\,dm-q\varepsilon.$ (4)

От (3) и (4) $\Rightarrow q\,m(E_{p,q})\leq\int_T f\,dm+|q|\varepsilon.$ (5)

От друга страна, в-ху $E_{p,q}$ имаме, че $f(x)<p$. Следователно, за да оценим $\int_T f\,dm=\underbrace{\int_{E_{p,q}} f\,dm}_{\leq p\,m(E_{p,q})}+\int_{T\setminus E_{p,q}} f\,dm$, а за да оценим втория интеграл,

използваме, че $T \subseteq U \Rightarrow T \setminus E_{p,q} \subseteq U \setminus E_{p,q} \Rightarrow m(T \setminus E_{p,q}) \leq m(U \setminus E_{p,q}) < \delta \Rightarrow \int_{T \setminus E_{p,q}} |f|\,dm < \varepsilon \Rightarrow \int_{T \setminus E_{p,q}} f\,dm < \varepsilon$ (6)

От (5) и (6) $\Rightarrow q\,m(E_{p,q}) \leq p\,m(E_{p,q}) + (1+|q|)\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

$\Rightarrow q\,m(E_{p,q}) \leq p\,m(E_{p,q})$

$\Rightarrow \underbrace{(q-p)}_{>0} m(E_{p,q}) \leq 0 \Rightarrow m(E_{p,q}) = 0.$ □

<u>Т-ма</u> (основна т-ма на ДИС, пресмятане на $\int$)

Нека $f \in AC[a,b]$. Тогава $f' \in L[a,b]$ и $\int_a^x f'\,dm = f(x) - f(a)$ $\forall x \in [a,b]$

<u>Зад.</u> От предишната т-ма следва, че ако формулата горе е вярна, то $f \in AC[a,b]$, така че това условие е и необходимо, за да бъде в сила горната теорема. Това показва, че функциите, които се възстановяват по своята производна посредством лебег. интеграл, са точно абсолютно непрекъснатите функции.

<u>Д-во</u> (на теоремата) Първата част на теоремата е очевидна. Остава да докажем формулата. Разглеждаме функцията

$$g(x) = f(x) - \int_a^x f'\,dm, \; x \in [a,b].$$

От предходните резултати следва, че $g \in AC[a,b]$. и $g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ п.н.. Следователно, за да установим формулата в теоремата е достатъчно да покажем, че всяка абс. непр. функция, чиято производна е 0 п.н. е тъждествено константа. Тогава ще имаме, че $g(x) \equiv const$ и остава да вземем предвид, че $g(a) = f(a) \Rightarrow g(x) = f(a)$ $\forall x \in [a,b]$.

Вместо да докажем горното твърдение в пълната му общност ($g \in AC$ и $g' = 0$ п.н. $\Rightarrow g \equiv const$) ще използваме, че всяка абс. непр. ф-ция е функция с ограничена вариация и следователно се представя като разлика на две монотонно растящи функции. Ще докажем, че $\exists$ такова представяне, в което двете функции освен, че са $\uparrow$, а и абс. непр.

Като използваме последното твърдение, заключаваме, че е достатъчно да установим формулата в теоремата за мон. раст. абс. непр. функция $f(x)$. При това ~~предположение~~ предположение функцията $g(x)$ също е монотонно растяща и абс. непр.. Действително, ако $x < y$, то

$$g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - \int_x^y f' dm \geq 0,$$

където сме използвали последната т-ма от миналата тема (ако $f$ е $\uparrow$, то $\int_a^b f' dm \leq f(b) - f(a)$). Така, за да завършим док. на т-мата, остава да покажем още, че всяка мон. растяща абс. непр. функция, чиято производна е 0 п.н., е тъждествено константа. Това ще направим в следните леми

**Лема 1** Всяка абс. непр. функция се представя като разлика на две монотонно растящи непрекъснати функции.

**Д-во** Нека $f \in AC[a,b]$. Разглеждаме функциите

$$\varphi_1(x) = \bigvee_a^x f, \; x \in [a,b] \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(x) - f(x).$$

Знаем, че $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са $\uparrow$. Остава да докажем, че $\varphi_1 \in AC[a,b]$. Оттук следва, че $\varphi_2$ е абс. непр. функция, защото е разлика на абс. непр. функции. Ще проверим, че $\varphi_1$ удовлетворява деф.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно фиксирано.

Щом $f \in AC([a,b])$, то $\exists \delta>0: \forall (a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$, непресичащи се два по два и $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ имаме, че $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Използвайки адитивността на вариацията по интервали, че $\varphi_1(b_k)-\varphi_1(a_k)=\bigvee_a^{b_k} f-\bigvee_a^{a_k} f=\bigvee_{a_k}^{b_k} f=\sup_{\tau_k}\{V_{\tau_k} f\}$, където

$\tau_k: a_k=x_{k,0}<\dots<x_{k,m_k}=b_k$ е разбиване на $[a_k,b_k]$ и

$V_\tau f=\sum_{j=1}^{m_k}|f(x_{k,j})-f(x_{k,j-1})|$.

Следователно

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi_1(b_k)-\varphi_1(a_k)]=\sum_{k=1}^{n}(\varphi_1(b_k)-\varphi_1(a_k))=\sup\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}|f(x_{k,j})-f(x_{k,j-1})|$$

където sup се взима по всички крайни системи от непресичащи се два по два интервали $\{(x_{k,j-1},x_{k,j})\}_{k,j=1}^{n,m_k}$, такива, че

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}(x_{k,j}-x_{k,j-1})=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta.$$ Сега от избора на $\delta$

следва, че

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}|f(x_{k,j})-f(x_{k,j-1})|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(\varphi_1(b_k)-\varphi_1(a_k))\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$ □

__Лема 7__ Ако $f$ е абс. непр. и мон. нарастваща и $S\subseteq[a,b]: m(S)=0$, то и $m(f(S))=0$.

__Заб.__ Твърдението остава в сила без изискването $f(x)$ да е $\uparrow$, но условието да бъде абс. непр. е съществено.

__Д-во__ Достатъчно е да докажем твърдението за $S\subseteq(a,b)$. Действително, в общия случай полагаме $S'=S\cap(a,b)$. Тогава $S'$ е измеримо и $m(S')=0$. От друга страна,

$m^*(f(S')) \le m^*(f(S)) \le m^*(f(S') \cup f(\{a,b\})) \le m^*(f(S')) + \underbrace{m^*(\{f(a),f(b)\})}_{=0}$

$\Rightarrow m^*(f(S')) = m^*(f(S))$.

Нека $S \subseteq (a,b)$ и $m(S)=0$. Ще докажем, че $m^*(f(S)) \le \varepsilon$.

Оттук ще следва, че $m^*(f(S))=0 \Rightarrow m(f(S))=0$ за всеки $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$, непресичащи се два по два, с $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ да имаме $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$. Щом $m(S)=0$, то $\exists$ отв. $U=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$, непресичащи се два по два, съдържащи се в $(a,b)$:

$U \supseteq S$ и $m(U)<\delta$. Последното означава, че $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \; \forall n$.

От абс. непр. на $f(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon \; \forall n \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)| \le \varepsilon$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}(f(b_k)-f(a_k)) \le \varepsilon$. Щом $U \supseteq S$, то $f(U) \supseteq f(S) \Rightarrow$

$m^*(f(S)) \le m^*(f(U))$. Но $f(U) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f((a_k,b_k)) =$

$= \bigcup_{k=1}^{\infty}(f(a_k),f(b_k)) \Rightarrow f(U)$ е отв., измеримо и $m(U) = \sum_{k=1}^{\infty}(f(b_k)-f(a_k))$

Така окончателно получихме, че $m^*(f(S)) \le \varepsilon$. $\square$

<u>Лема 3</u> Нека $f$ е абс. непр. и монотонно растяща. Ако $f'(x) \overset{п.н.}{=} 0$, то $f(x) \equiv const$ в $[a,b]$.

<u>Зад.</u> След като теоремата е доказана, от нея следва, че ако $f \in A \subseteq [a,b]$ и $f'(x)=0$ п.н., то $f(x) \equiv const$. Така условието за монотонност в лемата не е съществено.

<u>Д-во</u> Достатъчно е да покажем, че $m(f([a,b)))=0$. Действително, имаме, че .

$0 \le f(b)-f(a) = m([f(a),f(b)]) = m(f([a,b])) = 0 \Rightarrow f(a)=f(b)$ и т.к. $f(x)$ е мон. растяща, то $f(x) \equiv const$. И така, остава да докажем, че $m(f([a,b]))=0$.

Разглеждаме множеството $E = \{x \in [a,b] : f'(x)=0\}$. Тъй като $f'(x)=0$ п.н., то $m(E)=b-a$ и за $S=[a,b]\setminus E$ имаме, че $m(S)=0$.
Накрая, имаме, че

$m(f([a,b])) = m(f(E\cup S)) = m(f(E)\cup f(S)) \le m(f(E)) + m(f(S))$, но
от лема 2 $\Rightarrow m(f(S))=0$. Остава да докажем, че $m(f(E))=0$.
Това следва от лема 1 в предходната тема. Тя гласеше, че ако $f$ е непр. и мон. раст. и $\forall x \in E$ имаме, че
$D^+ f(x) < p \Rightarrow m^*(f(E)) \le p\, m^*(E)$.

$\Rightarrow \forall p>0 \quad m^*(f(E)) \le p\, m^*(E) = p(b-a) \Rightarrow m^*(f(E))=0 \Rightarrow m^*(f(E))=0$. □

08.06.2018 XV Теория на вероятностите

Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е пр-во с мярка. Навсякъде под мерки разбираме положителни мерки. Ако $\mu(X)=1$ казваме, че $\mu$ е вероятностна мярка, а $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - вероятностно пр-во. Елементите на $\mathcal{M}$ се наричат събития, а $\mu(S)$ - вероятност на събитието $S$; тя още се означава чрез $P(S)$.

Крайните измерими функции (отн. $\mathcal{M}$), дефинирани в $X$, се наричат сл. величини.

Нека $S \subseteq \mathbb{R}$. Тогава вероятността сл. вел. $f(x)$ да има стойност в $S$ е именно $\mu\{x\in X: f(x)\in S\} = \mu(f^{-1}(S))$. Да разгл. въпроса за това кога последното е добре деф., т.е. за кои $S$ $f^{-1}(S)\in\mathcal{M}$. Очевидно, ако $S$ е интервал, то понеже $f(x)$ е измерима, то мн-вото $f^{-1}(S)\in\mathcal{M}$.

Да припомним, по деф. $f: X\to\mathbb{R}$ е измерима отн. $\sigma$-алг. $\mathcal{M}$, ако множеството $\{x\in X: f(x)>c\}$ е измеримо, т.е. принадлежи на $\mathcal{M}$, за всяко $c\in\mathbb{R}$. Понеже $\mathcal{M}$ е $\sigma$-алгебра, то $\{x\in X: f(x)\in J\}\in\mathcal{M}$ за всеки интервал $J\subseteq\mathbb{R}$.

Ще покажем, че $f^{-1}(S)\in\mathcal{M}$ винаги когато $S$ е борелово пр-во. Да припомним, бореловата $\sigma$-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ от подмножества на $\mathbb{R}$, е $\sigma$-алгебра, породена от отв. интервали.

Разгл. мн-вото $\mathcal{F} = \{S\subseteq\mathbb{R} : f^{-1}(S)\in\mathcal{M}\}$. Тук $f(x)$ е фикс. сл. вел. (изм. ф-ция отн. $\mathcal{M}$). За да покажем, че $f^{-1}(S)\in\mathcal{M}$ $\forall S\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ще установим, че $\mathcal{F}$ е $\sigma$-алгебра, съдържаща отв. инт. в $\mathbb{R}$. Понеже $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ е най-малката $\sigma$-алгебра с такова св-во, ще имаме, че $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Както вече отбелязохме, $\mathcal{F}$ съдържа всички интервали.
Остава да проверим, че $\mathcal{F}$ е $\sigma$-алгебра:

(а) ако $S_1, S_2 \ldots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F}$:

Действително, $f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(S_j)}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$.

(б) ако $S \in \mathcal{F}$, то $S^c = \mathbb{R} \setminus S \in \mathcal{F}$:

аналогично имаме, че $f^{-1}(S^c) = \underbrace{(f^{-1}(S))}_{\in \mathcal{M}}{}^c = X \setminus f^{-1}(S) \in \mathcal{M}$.

И така, можем да разглеждаме въпроса за вероятността стойността на дадена случайна величина да попадне в борелово мн-во.

Ако $f \in L(X,\mu)$, то числото $\mathbb{E}f = \int_X f d\mu$ е добре деф. То се нарича (математическо) очакване или средно на сл. вел. $f$.
Една друга характеристика на сл. вел. е т. нар. дисперсия
$\mathbb{D}(f) = \int_X |f - \mathbb{E}f|^2 d\mu$. Ясно е, че $\mathbb{D}f < \infty \Leftrightarrow f \in L_2(X,\mu)$

Да отбележим, че т.к. $\mu$ е крайна, то както се установява чрез н-вото на Коши, пространството $L_2(X,\mu) \subseteq L(X,\mu)$.

Действително,

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |f| 1.1 d\mu \overset{K}{\leq} \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X 1^2 d\mu\right)^{1/2} = \sqrt{\underset{1}{\mu(X)}} \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu} = \|f\|_2$$

$\Rightarrow \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \Rightarrow L_2(X,\mu) \subseteq L_1(X,\mu)$.

Така установихме, че всяка сл. вел. в $L_2(X,\mu)$ притежава средно и крайна дисперсия.

Ще изведем формула за $\mathbb{E}$ и $\mathbb{D}$ на сл. вел. $f$ в термини-те на по-проста за работа мярка.

Да разгледаме $\mathbb{E}(f)$. По деф.

$$\mathbb{E}f = \int_X f\,d\mu$$

Ако $f(x)$ е ограничена (и все така измерима), то тя се явява граница на лебегови суми при диам. на разб., клонящ към 0. По-точно, нека $A < f(x) < B \ \forall x \in X$. Разгл. разбиването $\tau: A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B$ и мн-во $J_i = \{x \in X : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, т.е. $J_i = f^{-1}([a,b)) \in \mathcal{M}$, $i = 1, \dots, n$.

Да разгледаме малката сума на Лебег

$$\ell_\tau = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \underbrace{\mu(J_i)}_{\mu(f^{-1}([y_{i-1}, y_i)))} \xrightarrow[d(\tau)\to 0]{} \int_X f\,d\mu .$$

Това ни води към разглеждането на изображение $\mu_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ посредством формулата $\mu(S) := \mu(f^{-1}(S))$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Непосредствено се установява, че $\mu_f$ е вероятностна мярка в-ху измеримото мн-во $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

С тази нова мярка може да се докаже, че

$$\mathbb{E}f = \int_X f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} y\,d\mu_f .$$

$\mu_f$ се нарича вероятностно разпределение на сл. вел. $f(x)$. Горната формула се явява следствие на една обща т-ма в теория на мярката.

__Опр.__ Нека $(X, \mathcal{M})$ и $(Y, \mathcal{N})$ са измерими пр-ва. Казваме, че трансформацията $T: X \to Y$ е __измерима__, ако $T^{-1}(S) \in \mathcal{M}$ за $S \in \mathcal{N}$.

Поточно, казваме, че $T$ е <u>измерима трансформация</u> от $(X, \mathcal{M})$ в $(Y, \mathcal{N})$.

<u>Заб.</u> Горното свойство е доста рестриктивно. Например, ако говорим за измерими по Лебег подмножества на $\mathbb{R}$, съществува дори непр. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $S \in \mathcal{L}$ : $f^{-1}(S) \notin \mathcal{L}$.

От друга страна, ако $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($Y = \mathbb{R}$), то, както вече видяхме, $f^{-1}(S) \in \mathcal{M}$ $\forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ за всяка измерима функция $f$, деф. в $X$ относно дадена σ-алгебра $\mathcal{M}$.

Ако $T$ е измерима трансформация от $(X, \mathcal{M})$ в $(Y, \mathcal{N})$, дефинираме изображението $\mu_T : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ посредством $\mu_T(S) := \mu(T^{-1}(S))$, $S \in \mathcal{N}$, където $\mu$ е мярка (не непременно вероятностна, но положителна) в-ху $(X, \mathcal{M})$.

Може да се покаже, че $\mu$ е мярка в-ху $(Y, \mathcal{N})$.

<u>Т-ма</u> Нека $(X, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N})$ са измерими пространства, $\mu$ е мярка в-ху $(X, \mu)$ и $\mu_T$ е деф. горе мярка в-ху $(Y, \mathcal{N})$. Тогава, ако $g \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{N})$ и $g \in L(Y, \mu_T)$, то

$$\int_Y g \, d\mu_T = \int_X (g \circ T) \, d\mu.$$

<u>Заб.</u> Бихме могли да запишем $\mu_T$ във вида $\mu_T = \mu \circ T^{-1}$ (съвсем условно). Тогава горната формула може да се запише във вида

$$\int_X g \, d(\mu \circ T^{-1}) = \int_X (g \circ T) \, d\mu.$$

Д-во (на т-мата)

Първо ще установим твърдението за характеристични функции. И така, нека $S \in \mathcal{N}$ и $g = \chi_S$. Тогава

$$\int_Y g \, d\mu_T = \int_X \chi_S \, d\mu_T = \int_S d\mu_T = \mu_T(S) := \mu(T^{-1}(S))$$

От друга страна,

$$\int_X g \circ T d\mu = \int_X \chi_S \circ T d\mu.$$

Остава да забележим, че

$(\chi_S \circ T)(x) = 1 \iff \chi_S(T(x)) = 1 \iff T(x) \in S \iff x \in T^{-1}(S) \iff$
$\chi_{T^{-1}(S)}(x) = 1.$

Така доказахме, че $\chi_S \circ T = \chi_{T^{-1}(S)}$. Тогава

$$\int_X (\chi_S \circ T) d\mu = \int_X \chi_{T^{-1}(S)} d\mu = \int_{T^{-1}(S)} d\mu = \mu(T^{-1}(S)).$$

С това формулата е доказана за характеристични функции. Оттук, поради линейността на интеграла тя следва за прости функции. По-нататък използваме, че всяка неотр. изм. ф-ция е поточкова граница на прости функции. Като използваме това и т-мата на Бепо Леви установяваме формулата за неотр. изм. функции.

Накрая, като използваме деф. на леб. инт. и представянето на изм. ф-ция във вида $g = g^+ - g^-$, $g^\pm \in M^+(Y, \mathcal{N})$, зав. д-вото. □

__Сл.1__ Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е пр. пр-во. Ако $f \in L(X,\mu)$ и $g \in L(\mathbb{R}, \mu_f)$, то

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_f = \int_X g(f) \, d\mu$$

__Д-во__ Твърдението следва от предходната т-ма с $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $T = f$. Както вече отбелязахме, щом $f$ е измерима, то $f(x)$ е измерима трансформация от $(X, \mathcal{M})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. □

Ще използваме това следствие, за да изведем формули за $\mathbb{E}f$ и $\mathbb{D}f$ чрез интеграл относно мярката $\mu_f$.

За тази цел ще приложим следствието с $g(t) = t$ и $g(t) = (t-a)^2$, където $a = \mathbb{E}f$. Трябва да покажем, че ако $f$ е сумируема, то $g(t) = t$ е в $L(\mathbb{R}, \mu_f)$ и съответно, ако $f \in L_2(X,\mu)$, то $g(t) = (t-a)^2$ също е в $L(\mathbb{R}, \mu_f)$. (Да припомним, че щом $f \in L_2$, то $f \in L$).

В първия случай прилагаме горната теорема с $g(t) = |t|$. Това влече, че $\int_{\mathbb{R}} |t| \, d\mu_f = \int_X |f| \, d\mu < \infty$ т.к. $f \in L(X,\mu)$. Да отбележим, че $g(t) = |t|$ е непр. и следователно измерима относно $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Прилагаме т-мата с $Y = \mathbb{R}$ и $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Така установихме, че $g(t) = t$ е сумируема относно $\mu_f$. Сега прилагаме отново същата теорема, но с $g(t) = t$ и така получаваме, че .

$$\int_{\mathbb{R}} t\, d\mu_f = \int_X f\, d\mu = \mathbb{E}f.$$

Аналогично, прилагайки т-мата с неогр. измерима функция $g(t)=(t-a)^2$. ($g(t)$ е непр) и веднага получаваме, че

$$\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 d\mu_f = \int_X (f-a)^2 d\mu = \mathbb{D}(f) < \infty$$

(тя е крайна за $f \in L_2(X,\mu)$).

Интегралите относно мярката $\mu_f$ представляват интеграл на Лебег-Стилтес. Една монотонна функция, която поражда $\mu_f$ е

$$F_f(t) = \mu_f((-\infty,t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Функцията $F_f(t)$ е $\geq 0$, $\uparrow$ и непр. отляво. Всъщност $F_f(t)=\mu\{x \in X : f(x) < t\}$. $F_f$ се нарича функция на разпределение на сл. вел. $f$.

С нейна помощ разл. формули се записват още така

$$P(f \in S) = \mu_f(S) = \int_S dF_f$$

$$\mathbb{E}f = \int_{\mathbb{R}} t\, dF_f(t), \qquad f \in L(X,\mu)$$

$$\mathbb{D}f = \int_{\mathbb{R}} (t-\mathbb{E}f)^2 dF_f(t),\ f \in L_2(X,\mu).$$

Ще сведем тези интеграли от Лебег-Стилтес към лебегови интеграли в-ху $\mathbb{R}$.

**Тв.** Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е вероятностно пр-во и $f(x)$ е сл. вел. в-ху него. Тогава $\mu_f \ll m \Leftrightarrow F_f \in AC(\mathbb{R})$.

**Д-во** Нека $\mu_f \ll m$, т.е. ако $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $m(S)=0$, то $\mu_f(S)=0$. Ще покажем, че $F_f \in AC(\mathbb{R})$. Прилагаме т-мата на Радон-Никодим. Така получаваме, че $\exists h \in L(\mathbb{R}, m)$:

$$\int_{\mathbb{R}} F \, d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} F h \, dm \quad \forall F \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}) \quad (\text{изм. отн. } \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

В частност, за $F = \chi_{(-\infty, t)}$ имаме

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,t)} \, d\mu_f = \int \chi_{(-\infty,t)} h \, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{t} d\mu_f}_{=\mu_f((-\infty,t)) = F_f(t)} = \int_{-\infty}^{t} h \, d\mu .$$

Така получихме, че $F_f(t) = \int_{-\infty}^{t} h \, d\mu$, $h \in L(\mathbb{R}; m)$ $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_f \in AC(\mathbb{R}) \Rightarrow F'_f = h$.

Щом $h = F'_f$, то от т-мата на Радон-Никодим $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(t) \, dF_f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(t) F'_f(t) \frac{dt}{dm}, \quad F \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ и } F \in L(\mathbb{R}, m). \qquad (1)$$

Обратно, нека $F_f \in AC(\mathbb{R})$. Тогава $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$: за всяка крайна система от отворени, непр. се два по два интервала $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ с $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ да имаме $\sum_{k=1}^{n} |F_f(b_k) - F_f(a_k)| < \varepsilon$.

Последното влече $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (F_f(b_k) - F_f(a_k)) = \sum_{k=1}^{n} (\mu_f(-\infty, b_k) - \mu_f(-\infty, a_k)) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \mu_f([a_k, b_k)) = \mu_f(\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k)) \geq \mu_f(\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k))$.

Нека $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $m(S) = 0$. Ще докажем, че $\mu_f(S) = 0$. Достатъчно е да покажем, че $\mu_f(S) \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Щом $m(S) = 0$, то $\overset{\forall \delta > 0}{\exists}$ отв. мн. $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$, непр. са два по два, такава, че $U \supseteq S$ и $m(U) < \delta$.

Последното означава, че $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
(за $\delta$ от първ. разглеждания)
$\Rightarrow \mu_f(\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k)) < \varepsilon$ $\forall n \overset{\text{(пълна адитивност на } \mu_f)}{\Rightarrow} \mu_f(\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)) \leq \varepsilon$, т.е. $\mu_f(U) \leq \varepsilon$. Като използваме монотонността на $\mu_f$ и $S \subseteq U$ заключ., че

$$\mu_f(S) \leq \mu_f(U) \leq \varepsilon.$$

$\square$

Сега, като използваме и (1), достигаме до формулите, достигаме до формулите за ф-ции на разпределение на абс. непр. сл. вел.

$$\mathbb{E} f = \int_{\mathbb{R}} t\, p_f(t)\, dt \quad \text{и} \quad \mathbb{D} f = \int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 p_f(t)\, dt,$$

където сме положили $p_f = F'_f$, $p_f$ се нарича плътност на $f(x)$.

Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са сл. величини над $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Нека $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ е σ-алг. е породена от отв. правоъгълници в $\mathbb{R}^2$.

Разгл. сл. вел. $R(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x \in X$. Аналогично на случая за една сл. вел. се доказва, че $R^{-1}(S) \in \mathcal{M}$ $\forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Дефинираме изображението $\mu_{f_1, f_2}(S) = \mu(R^{-1}(S))$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. $\mu_{f_1, f_2}$ е вероятностна мярка..

<u>Опр.</u> Казваме, че сл. вел. $f_1$ и $f_2$ в-ни у $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ако $\mu_{f_1, f_2} = \mu_{f_1} \times \mu_{f_2}$.

Т-ма Ако $\xi_1$ и $\xi_2$ са две независими случайни величини в-ху едно и също вероятностно пространство с крайни дисперсии, то $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)=\mathbb{E}\xi_1\,\mathbb{E}\xi_2$.

Д-во След като $\xi_1$ и $\xi_2$ имат сумируем квадрат, то както следва от неравенството на Коши, $\xi_1,\xi_2,\xi_1\xi_2\in L(X,\mu)$. Както знаем

$$\mathbb{E}(\xi_i)=\int_{\mathbb{R}} x\,d\mu_{\xi_i},\ i=1,2.$$

Ще докажем, че $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)=\int_{\mathbb{R}^2} xy\,d\mu_1\mu_2$. Ще докажем, че

$\int_X \xi_1\xi_2\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^2} xy\,d\mu_{\xi_1,\xi_2}$. Прилагаме т-мата за измеримите трансформации. Въвеждаме $T(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x))$. Както в случая на една променлива се установява, че $T$ е изм. трансформация от $(X,\mu)$ в $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Полагаме $g(x,y)=xy$. Функцията $|g|\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Сега от теоремата с $|g|$ следва, че

$\int_{\mathbb{R}}|g|\,d\mu_{\xi_1,\xi_2}=\int_X|\xi_1\xi_2|\,d\mu<\infty\Rightarrow g\in L(\mathbb{R}^2,m^2)$. Сега отново прилагаме т-мата с $g(x,y)=xy\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^2}xy\,d\mu_{\xi_1,\xi_2}=\int_X\xi_1\xi_2\,d\mu=\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$.

Прилагаме т-мата на Фубини и получаваме, че

$$\int_{\mathbb{R}^2}xy\,d\mu_{\xi_1,\xi_2}=\int_{\mathbb{R}^2}xy\,d(\mu_{\xi_1}(x),\mu_{\xi_2}(x))=\int_{\mathbb{R}}y\left(\int_{\mathbb{R}}x\,d\mu_{\xi_1}(x)\right)d\mu_{\xi_2}(x)=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}y\,\mathbb{E}(\xi_1)\,d\mu_{\xi_2}(y)=\mathbb{E}\xi_1\,\mathbb{E}\xi_2.$$